15 Posebne funkcije

Posebne funkcije – Geometrijska vrsta – Binomska vrsta – Eksponentna funkcija – Logaritemska funkcija – Kotne funkcije – Kotne tabele – Grafi kotnih funkcij – Obratne kotne funkcije

15.1 Posebne funkcije

Tipi funkcij

Funkcije, ki smo jih obravnavali do sedaj, so bile bodisi polinomi, bodisi njihovi kvocienti ali koreni. Vprašali smo se tudi, ali morda v naravi obstajajo še kakšne odvisnosti, ki jih ne moremo opisati z omenjenimi "algebrajskimi" funkcijami. Kje naj iščemo take posebne, "transcendentne" funkcije? V doslej skritih kotičkih matematike in narave!

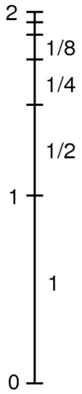
15.2 Geometrijska vrsta

Polinome lahko zgradimo iz toliko členov, kot hočemo. Kaj če bi uporabili neskončno mnogo členov? Najpreprostejši tovrstni izraz je naslednji:

$$G = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \tag{15.1}$$

Konvergenca

To je *geometrijska vrsta*. V principu lahko za vsak argument x izračunamo vsoto iz toliko vodilnih členov, kot hočemo. Za $x = 0$ je vrsta trivialno enaka 1. Za $x = 1$ vsota očitno narašča preko vsake meje, prav tako za argumente $x > 1$. Za $x = 1/2$ pa se vsota čedalje tesneje bliža k vrednosti $G = 2$. To uvidimo takole: na palico enotne dolžine nataknemo polovico te palice, nato polovico polovice in tako dalje. Rečemo, da vsota *konvergira* k navedeni *limiti* oziroma da je vrsta *konvergentna*.



Slika 15.1 Vsota geometrijske vrste $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ konvergira k 2. Količnik med dvema zaporednima členoma, kjerkoli v vrsti, znaša 1/2. Vrste z drugačnim količnikom, vendar manjšim od 1, tudi konvergirajo.

Limitne vsote

Pričakujemo, da geometrijska vrsta konvergira za vsak argument, ki je absolutno manjši od 1. Kako to dokazati in kako najti ustrezne limite? Delno vsoto $G = 1 + x + x^2 + \dots x^n$ pomnožimo na obeh straneh z x ter dobimo $xG = x + x^2 + \dots x^{n+1}$. Obe enačbi med seboj odštejemo ter pridelamo $(1 - x)G = 1 - x^{n+1}$ oziroma $G = (1 - x^{n+1})\,/\,(1 - x)$. Nato povečujemo n proti neskončnosti. Člen x^{n+1} se pri tem zmanjšuje na nič, če je le $|x| < 1$. Preostane

$$G = \frac{1}{1-x}\,, |x| < 1\,. \tag{15.2}$$

Vrsta je torej res konvergentna (za navedene argumente) in za vsak argument tudi vidimo, kam vrsta konvergira. Za $x = 1/3$, na primer, konvergira proti $G = 3/2$.

15.3 Binomska vrsta

Potence binoma

Posebno lepe polinome dobimo, če izračunamo potence binoma $(1 + x)^n$ za naraščajoče vrednosti eksponenta n. Pridelani polinom stopnje n ima $n + 1$ členov, vsebujočih potence x^0, x^1, x^2 in tako naprej do x^n. Koeficienti pred njimi so pozitivni in simetrični:

```
n = 0         1
n = 1        1 1
n = 2       1 2 1
n = 3      1 3 3 1
n = 4     1 4 6 4 1
```

Vsak koeficient je vsota dveh koeficientov, ki ležita nad njim. Z nekaj truda nam uspe najti naslednji vzorec

$$B = (1 + x)^n = \tag{15.3}$$
$$1 + \frac{n}{1}\,x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\,x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,x^3 + \ldots + x^n\,.$$

Binomska vrsta

Razvoj potence binoma v polinom velja, če je eksponent n naravno število. Kaj pa, če stisnemo zobe in za eksponent zapišemo skalar s, recimo $-1/2$? Leva stran ima potem še vedno svoj pomen, saj postane splošna potenca. Desna stran pa se ne konča, ampak število členov naraste brez konca:

$$B = (1 + x)^s = \tag{15.4}$$
$$1 + \frac{s}{1}\,x + \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2}\,x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,x^3 + \ldots\,.$$

Rečemo, da je nastala *binomska vrsta*. Zelo je podobna geometrijski vrsti, saj v njej prav tako nastopajo zaporedne potence, le koeficienti pri njih so drugačni. Obe vrsti imata obliko

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots \tag{15.5}$$

Takšne vrste imenujemo *potenčne vrste*. Pričakujemo, da bomo kakšno še srečali.

V principu lahko v binomski vrsti izračunamo toliko členov, kolikor hočemo. Pojavita pa se seveda dve vprašanji: ali in za kakšne argumente je vrsta konvergentna ter ali je njena vsota (za vsak legitimni argument) enaka potenci na levi strani.

Konvergenčni kriterij

Binomska (in tudi drugačna potenčna) vrsta je gotovo konvergentna, če so vsi njeni repni členi (absolutno) manjši od ustrezajočih členov konvergentne geometrijske vrste. Končno število začetnih členov pač ne šteje. Pri geometrijski vrsti so, kot vemo, kvocienti zaporednih členov konstantni in absolutno manjši od ena. Kakšna pa je stvar pri binomski vrsti? Ne pričakujemo, da bodo kvocienti konstantni, saj bi na ta način imeli opravka spet z geometrijsko vrsto. Mogoče pa je, da (pri izbrani vrednosti argumenta) limitirajo h kakšni vrednosti r, in je ta vrednost absolutno manjša od 1. Potem je binomska vrsta res členoma omejena z geometrijsko vrsto s koeficientom r. Pogoj za konvergenco binomske (in tudi druge potenčne) vrste je torej

$$|u| < \infty \Longleftrightarrow \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} x \right| < 1 \,. \tag{15.6}$$

Oznaka $\lim n \to \infty$ pomeni limitno vrednost kvocientov pri pomikanju vzdolž neskončnega repa. Kvocient a_{n+1}/a_n v binomski vrsti znaša $(s-n)\,/\,(n+1)$. Pri velikih n postane enak -1, zato pride do konvergence le za $|x| < 1$. Da pa so iz vrste izračunane vrednosti res enake potenci na levi, se prepričamo z nekaj konkretnimi izračuni.

Konvergenčni kriterij tudi pove, da v vsaki konvergentni vrsti (absolutna) velikost členov pada proti nič. Morda je res tudi obratno? Žal ne. Znana je namreč "harmonična" vrsta $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots$, ki ne konvergira. To uvidimo takole. Dva člena $(1/3 + 1/4)$ sta večja od $1/2$. Štirje členi $(1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8)$ so tudi večji od $1/2$ in tako naprej. Celotna harmonična vrsta je torej večja od vrste $1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots$, ki pa je očitno divergentna.

Računska uporaba

Binomska vrsta je zelo primerna za izračun korenov. Številu A, ki ga hočemo koreniti, poiščemo primeren približni koren a in zapišemo $A = a^2 + b = a^2(1 + b/a^2)$, torej $A^{1/2} = a \cdot (1 + b/a^2)^{1/2}$. Paziti moramo le, da je drugi člen binoma manjši od 1. Čim manjši je, tem bolje. Potem binom razvijemo v vrsto in izračunamo ter seštejemo nekaj prvih členov. Včasih je dovolj že en sam. Podobno računamo tudi višje korene.

15.4 Eksponentna funkcija

Obrestovanje

Posojeni denar u_0 "raste" s pretečenimi leti N, kakor pove že spoznana obrestno obrestna enačba (6.6): $u = u_0\,(1+p)^N$. Pri tem se količina denarja povečuje konec vsakega leta. To ni čisto "pošteno", pravijo pohlepni posojilodajalci; bolj "prav" bi bilo, da se povečuje v krajših časovnih korakih, recimo vsake $1/n$ leta, in sicer za ustrezno manjšo obrestno mero p/n. Potem nastane po N letih $u = u_0\,(1 + p/n)^{nN}$ denarja. Čim krajši je časovni interval obrestovanja, to je, čim večji je n, tem bolj denar zraste v opazovanem številu let.

Eksponentna vrsta

Zapisani binom lahko polepšamo. Najprej ga s substitucijo $p/n = 1/m$ spremenimo v obliko $(1 + 1/m)^{mpN}$ in nato s substitucijo

$pN = x$ v obliko $(1+1/m)^{mx}$. Slednjo razvijemo v binomsko vrsto. Nato privzamemo, da je m zelo velik in zanemarimo tiste člene, ki imajo v imenovalcih potence m. Tako pridelamo naslednjo potenčno vrsto za x in z njo definiramo novo, *eksponentno funkcijo*:

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad (15.7)$$

Zaradi krajšega pisanja smo uvedli oznako $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k$, *fakulteto*. Z naraščajočim k limitira razmerje zaporednih členov $|x/(k+1)|$ proti nič in sicer za vsakršno vrednost argumenta. Vrsta je torej konvergentna za $|x| < \infty$.

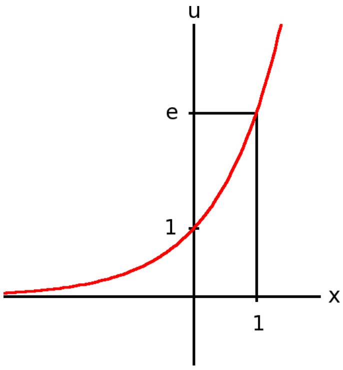
Eksponentna funkcija pove, za kakšen faktor naraste začetna količina denarja, ki se nenehno obrestuje, če poznamo produkt med njegovo obrestno mero na časovno enoto (p) in pretečenimi časovnimi enotami (N). Pri $p = 0{,}05$/leto in $N = 10$ let je torej treba izračunati $\exp(pN) = \exp(0{,}5)$. Vidimo tudi, da dvakrat večja obrestna mera naredi v dvakrat krajšem času enako mnogo denarja.

Eksponentna funkcija

Ko v eksponentno vrsto vstavimo $x = 1$ in seštejemo nekaj prvih členov, dobimo 2,71. To je približek, na tri mesta, k številu e, ki bi ga dobili s seštevanjem "vseh" členov. Ker je $(1+1/m)^{mx}$ enako $[(1+1/m)^m]^x$, uvidimo še

$$\mathrm{e}^x = \exp(x). \qquad (15.8)$$

Eksponentna funkcija je torej potenca z osnovo e in z eksponentom kot spremenljivko. S tem smo tudi upravičili njeno ime. Tako raste denar, število ljudi v ugodnih razmerah in še marsikaj.



Slika 15.2 Graf eksponentne funkcije $u = \mathrm{e}^x$. Bolj splošna funkcija $u = A\mathrm{e}^{kx}$ seka ordinatno os v A, s k pa je urejena tamkajšnja strmina. Negativni vrednosti prvega in drugega parametra pomenita zrcaljenje preko abscisne in ordinatne osi.

Eksponentne funkcije ni dobro zamenjati s potenčno, ki ima osnovo, ne eksponent, za spremenljivko.

15.5 Logaritemska funkcija

Naravni logaritem

K eksponentni funkciji obstaja obratna funkcija – logaritem z osnovo e. Rekli mu bomo *naravni logaritem*:

$$u = \mathrm{e}^x \Longleftrightarrow \log_{\mathrm{e}} u = x\,. \tag{15.9}$$

Namesto $\log_{\mathrm{e}}$ bomo raje pisali krajše:

$$\ln u = \log_{\mathrm{e}} u\,. \tag{15.10}$$

Graf logaritma je – kakor mora biti – s strani pogledan graf za eksponentno funkcijo. Definiran je le za pozitivne vrednosti argumenta.

Sprememba logaritemske baze

Vrednosti eksponentne funkcije zlahka izračunamo iz njene vrste in jih tabeliramo. S tem hkrati izdelamo tabelo za naravne logaritme. Pojavi se vprašanje, ali morda lahko iz znanih naravnih logaritmov izračunamo desetiške. Da: iz $u = 10^x$ z naravnim logaritmiranjem dobimo $\ln u = x \ln 10$ in z desetiškim logaritmiranjem $\lg u = x$ ter iz obojega

$$\lg u = \frac{\ln u}{\ln 10}\,. \tag{15.11}$$

Logaritma sta sorazmerna. Sorazmernostni koeficient izračunamo z eksponentno vrsto: $\ln 10 = 2{,}30$.

Sprememba eksponentne baze

Morda lahko povežemo tudi eksponentni funkciji z osnovo e in z osnovo 10? Spet da: iz $10^x = \exp(\ln(10^x))$ sledi

$$10^x = \mathrm{e}^{x \ln 10}\,. \tag{15.12}$$

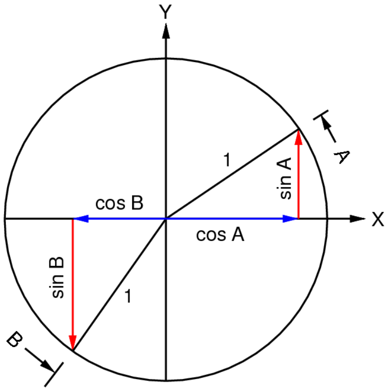
Kar velja za desetiški logaritem in desetiško eksponentno funkcijo glede povezanosti z "naravnim" logaritmom in "naravno" eksponentno funkcijo, velja seveda tudi za logaritme in eksponentne funkcije s poljubno (pozitivno) osnovo.

15.6 Kotne funkcije

Pri klancu je razmerje med njegovo višino h in diagonalo d enolično odvisno od nagibnega kota. Drugače rečeno: to razmerje je funkcija kota. Razmerje smo svoj čas krstili za sinus (8.7) in tako ga bomo poimenovali tudi kot funkcijo. Podobno smo definirali še razmerji kosinus in tangens in tudi na ti dve razmerji zdaj pogledamo kot na funkciji kota. Vse skupaj bomo poimenovali *kotne funkcije*.

Enotni krog

Kotne funkcije smo definirali le za klance, ki imajo dvižne kote med 0 in 90° oziroma med 0 in π/2. Vendar nam nič ne brani, da definicije razširimo na še večje kote. Vizirni kazalec na astrolabu z radijem r – spremenljiv klanec – pač zasučemo za poljubno velik kot φ. Pri zasuku se kazalec dotakne oboda v neki točki. Projekcije te točke na vodoravno in navpično os bomo izkoristili za razširjeno definicijo kotnih funkcij.



Slika 15.3 Enotni krog. Krog z radijem 1 služi za razširjeno definicijo kotnih funkcij za poljubni kot. Prikazani sta funkciji sinus in kosinus za dva kota. Prvi kot je z intervala $[0, \pi/2]$ in drugi z intervala $[\pi, 3\pi/2]$. Na prvem intervalu sta obe funkciji pozitivni in na drugem negativni.

Kotne funkcije

Višina vizirne točke nad ali pod vodoravno osjo astrolaba je daljica y; če je usmerjena navzgor, jo proglasimo za pozitivno, če navzdol, za negativno. Podobno je z razdaljo x točke od navpične osi astrolaba: če je usmerjena "naprej", naj bo pozitivna, sicer negativna. Dolžini y in x poimenujemo (predznačeni) koordinati opazovane obodne točke ter definiramo:

$$
\begin{aligned}
\frac{y}{r} &= \sin\varphi \\
\frac{x}{r} &= \cos\varphi \\
\frac{y}{x} &= \tan\varphi\,.
\end{aligned}
\tag{15.13}
$$

S tem so kotne funkcije definirane za poljuben kot med 0 in 2π. Ta kot štejemo od vodoravne osi proti navpični, torej v nasprotni smeri urinega kazalca. Definicijo uveljavimo tudi za še večje kote (ko naredi kazalec več kot en obrat) in za negativne kote – tiste, ki jih merimo v nasprotni smeri, torej v smeri urinega kazalca. Dosedanje definicije so zajete kot poseben primer.

Veljavnost izrekov

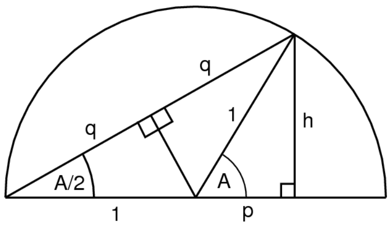
Kaj pa je z že spoznanimi osnovnimi izreki (8.8) ter s sinusnim (8.11) in kosinusnim (8.12) izrekom? Ali ostajajo v veljavi tudi za večje in celo za negativne kote? Z nekaj risbami in računi se prepričamo, da je odgovor pritrdilen. Pri tem smo deležni še nepričakovanega blagoslova. V sinusnem izreku namreč ni treba za topi kot A pisati $\sin(180° - A)$, ampak pišemo kar $\sin A$, torej enako kot za ostri kot. Definicija sinusa namreč poskrbi, da sta oba izraza identična. V kosinusnem izreku pa za topi kot ni treba več pisati $\cos(180° - A)$, ampak kar $-\cos A$, torej enako kot za ostri kot. Da sta oba izraza identična, poskrbi definicija kosinusa.

15.7 Kotne tabele

Za sedaj znamo določiti vrednosti kotnih funkcij pri poljubnem kotu zgolj z merjenjem njegovih projekcij. Le za nekatere kote, recimo 30°, jih znamo tudi izračunati. Ali ne bi bilo lepo, če bi jih znali izračunati za vsak kot med 0 in 90°? Očitno bi bilo to mogoče, če bi znali iz kotnih funkcij danega kota izračunati kotne funkcije polovičnega kota; in pa iz kotnih funkcij dveh danih kotov izračunati kotne funkcije za vsoto in razliko teh kotov.

Polovični kot

Ob omembi polovičnega kota se spomnimo naslednjega dejstva iz [8.4]: enakokraki kot nad tetivo kroga, z vrhom v njegovem središču, je točno dvakrat večji od enakokrakega kota nad isto tetivo, vendar z vrhom na obodu. To izkoristimo za izračun ustreznih kotnih funkcij.



Slika 15.4 Shema za izrek o sinusu in kosinusu polovičnega kota.

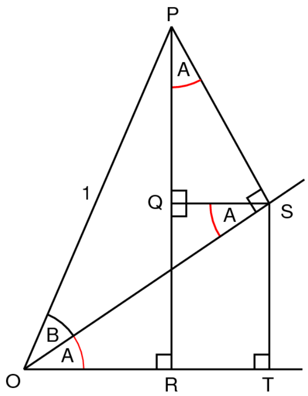
Slika pove: $\cos A = p$; $\cos A/2 = q$; in $\cos A/2 = (1+p)/2q$. Pa še tole: $\sin A = h$ in $\sin A/2 = h/2q$. Iz prve enačbe izrazimo p, iz druge q in oba vstavimo v tretjo enačbo. Nato pa q iz druge enačbe in h iz četrte vstavimo še v peto enačbo. Preimenujemo $A/2$ in A v A in $2A$ ter dobimo:

$$
\begin{aligned}
(\cos A)^2 &= \frac{1}{2}\,(1+\cos 2A) \\
\sin A \cos A &= \frac{1}{2}\sin 2A\,.
\end{aligned} \tag{15.14}
$$

To sta izreka o sinusu in kosinusu polovičnega kota. Seveda sta hkrati tudi izreka o sinusu in kosinusu dvakratnega kota.

Vsota kotov

Določitev kotnih funkcij za vsoto kotov zahteva, da bika zgrabimo naravnost za roge: brez kakršnegakoli izogibanja moramo narisati ustrezajočo sliko in iz nje razbrati, kar iščemo.



Slika 15.5 Shema za izrek o sinusu in kosinusu vsote kotov.

Računamo takole: $\sin(A+B) = \mathrm{PR} = \mathrm{PQ} + \mathrm{QR} = \mathrm{PQ} + \mathrm{ST} = \mathrm{PS}\cos A + \mathrm{OS}\sin A = \sin B\cos A + \cos B \sin A$. In pa takole: $\cos(A+B) = \mathrm{OR} = \mathrm{OT} - \mathrm{RT} = \mathrm{OT} - \mathrm{QS} = \mathrm{OS}\cos A - \mathrm{PS}\sin A = \cos B\cos A - \sin B\sin A$. Torej:

$$
\begin{aligned}
\sin(A+B) &= \sin A\cos B + \cos A \sin B \\
\cos(A+B) &= \cos A\cos B - \sin A\sin B\,.
\end{aligned} \tag{15.15}
$$

To sta izreka o sinusu in kosinusu vsote dveh kotov. Kot poseben primer $A = B$ vsebujeta tudi oba izreka o dvojnem kotu.

Razlika kotov

Vse štiri izreke smo izpeljali za kote, manjše od 90°. Z nekaj računi pa se prepričamo, da veljajo za poljubne, tudi za negativne kote. Zato s substitucijo $B \to -B$ zlahka zapišemo izrek o sinusu in kosinusu razlike. Upoštevati moramo le to, da je sinus liha in kosinus soda funkcija: $\sin(-B) = -\sin B$ in $\cos(-\mathrm{B}) = \cos B$. Izkaže se, da je treba na desni strani izrekov zgolj zamenjati znak "+" v "−" in obratno.

S pridelanimi izreki izračunamo tabelo sinusov (in drugih kotnih funkcij) s korakom okrog 1°. Bolj drobne korake določimo, če je treba, z interpolacijo.

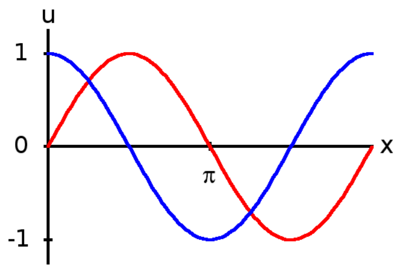
Goste kotne tabele so – tako kot logaritemske – debele in neudobne za prenašanje. Kdo pa nam brani, da jih (z omejeno natančnostjo) ne narišemo na drsno računalo kot eno ali več dodatnih skal? Tako uporabnost računala še povečamo.

15.8 Grafi kotnih funkcij

Sinus in kosinus

Graf funkcije $u = \sin x$ – vseeno je, s kakšnimi simboli označimo spremenljivke – je slika morskega vala z višino vrhov +1 in dolin −1. Val seka abscisno os pri 0 od spodaj navzgor in nato v zaporednih intervalih po π. Med temi ničelnimi točkami ležijo vrhovi in doline. Funkcija je *periodična*: $u(x) = u(x + 2\pi)$ s *periodo* 2π in liha.

Graf funkcije $u = \cos x$ je enak kot za sinus, vendar premaknjen v levo za π/2, torej z vrhom vala pri 0. Funkcija je periodična in soda.



Slika 15.6 Graf sinusne funkcije $u = \sin x$ (rdeča črta) in kosinusne funkcije $u = \cos x$ (modra črta). Prikazana je le osnovna perioda vsake funkcije. Ta perioda se ponavlja v levo in v desno brez konca.

Splošna sinusoida

Obe funkciji – sinus in kosinus – zajamemo v splošno obliko, upoštevajoč sinus vsote (15.15):

$$u = A\sin(kx + \delta) = a\sin kx + b\cos kx \qquad (15.16)$$
$$a = A\cos\delta$$
$$b = A\sin\delta\,.$$

Rečemo, da je to *sinusoida*. Vrhove in doline ima povečane za faktor A, razdalje med ničlami skrajšane za faktor k in je zamaknjena v levo ali desno za δ.

Graf funkcije tangens narišemo z grafičnim deljenjem funkcij sinus in kosinus: kjer je sinus enak 0, je tangens enak 0, in kjer je kosinus enak 0, je tangens enak $\pm\infty$; rečemo, da je tam pol, skozi katerega poteka navpična asimptota. Med dvema poloma tangens narašča.

15.9 Obratne kotne funkcije

Obratne funkcije h kotnim funkcijam poimenujemo arkus sinus, arkus kosinus in arkus tangens:

$$\begin{aligned} \sin x = u &\Longleftrightarrow x = \operatorname{asin} u \\ \cos x = u &\Longleftrightarrow x = \operatorname{acos} u \\ \tan x = u &\Longleftrightarrow x = \operatorname{atan} u\,. \end{aligned} \tag{15.17}$$

Večličnost

Ker so kotne funkcije periodične, so njihove obratne funkcije *večlične*, to je, izvornega števila ne preslikajo v eno samo ciljno število, marveč v več, celo v neskončno mnogo. Zato obračamo le primerno dolge izvorne intervale: sinus predstavimo z naraščajočo vejo med $-\pi/2$ in $+\pi/2$, kosinus s padajočo vejo med 0 in π in tangens z naraščajočo vejo med $-\pi/2$ in $+\pi/2$. Grafi obratnih funkcij so taki kot grafi izvornih vej, gledani "od strani".

S tem zaenkrat zaključujemo iskanje transcendentnih funkcij. Brez dvoma jih bomo kasneje pri raziskovanju narave odkrili oziroma definirali še kaj. □