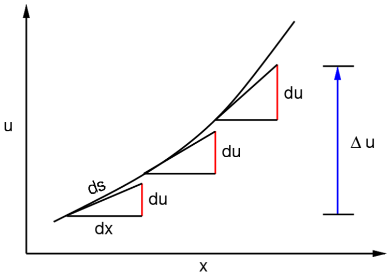
17 Integrali

Integral – Integrali osnovnih funkcij – Pravila integriranja – Integriranje vrst – Uporaba v geometriji

17.1 Integral

Diferencialni trikotniki

Tangenta na krivuljo v izbrani točki $u(x)$ določa lokalni *diferencialni trikotnik*, sestavljen iz poljubno dolgega kosa te tangente $\mathrm{d}s$ ter iz pripadajočih diferencialov $\mathrm{d}x$ in $\mathrm{d}u$. Tudi v točki $u(x+\mathrm{d}x)$ lahko narišemo lokalni diferencialni trikotnik in tako naprej. Na ta način narišemo vzdolž krivulje zaporedje trikotnikov, ki se tiščijo drug drugega.



Slika 17.1 Niz diferencialnih trikotnikov. Vsota diferencialov funkcije $\mathrm{d}u$ je enaka spremembi funkcije Δu, če so le diferenciali dovolj majhni.

Pri dovolj majhnih $\mathrm{d}x$ so diferenciali $\mathrm{d}u$ praktično enaki lokalnim spremembam funkcije Δu, vsota vseh diferencialov pa je enaka celotni spremembi funkcije, ki jo tudi označimo kot Δu:

$$\Delta u = \lim_{\mathrm{d}u \to 0} \sum \mathrm{d}u = \int \mathrm{d}u\,. \tag{17.1}$$

To je definicija *integrala* funkcije in s tem začetek razvoja integralnega računa (LEIBNIZ, EULER). Da moramo seštevati dovolj majhne diferenciale, opozorimo z oznako "$\lim_{\mathrm{d}u \to 0} \sum$" oziroma, krajše, z znakom $\int$. V praksi obravnavamo $\mathrm{d}u$ kot majhno spremembo funkcije in $\int \mathrm{d}u$ kot vsoto njenih majhnih sprememb.

Računanje integrala

Ker lahko vsakega izmed zaporednih diferencialov izrazimo z lokalnim odvodom, velja:

$$\int \mathrm{d}u = \int_a^b u'\,\mathrm{d}x = u(b) - u(a)\,. \tag{17.2}$$

Integral funkcije $u'(x)$ med krajiščnima točkama $x = a$ in $x = b$ torej izračunamo tako, da – kakor vemo in znamo – poiščemo *primitivno funkcijo* $u(x)$, katere odvod je enak integrirani funkciji, ter izračunamo njeno razliko med krajiščnima točkama.

Določeni in nedoločeni integral

Integral med dvema zakoličenima mejama je *določen*: je neko število. Lahko si pa mislimo zgornjo mejo spremenljivo; tedaj postane integral funkcija te meje. Funkcija je odvisna še od postavitve spodnje meje: če to prestavimo, se spremeni za aditivno konstanto. Rečemo, da je tak integral brez specificiranih mej *nedoločen* in pišemo:

$$\int u' \,\mathrm{d}x = u(x) + C\,. \tag{17.3}$$

Diferenciranje je določanje diferencialov vzdolž znanega grafa. Integriranje, to pa je določanje celotnega grafa iz znanega zaporedja diferencialov. Integriranje je torej obratna operacija k diferenciranju.

17.2 Integrali osnovnih funkcij

Integral izračunamo tako, da podintegralsko funkcijo predelamo v obliko, ko v njej prepoznamo odvod znane funkcije. Na primer: (nedoločeni) integral x^2 je enak $x^3/3 + C$, ker je odvod druge funkcije enak prvi funkciji. Aditivno konstanto ponavadi kar izpuščamo.

Nabor integralov

Iz že poznanih odvodov osnovnih funkcij (16.5–9) takoj sledijo naslednji osnovni integrali (aditivna konstanta je izpuščena):

$$\begin{aligned}
&\int c \,\mathrm{d}x = cx \qquad (17.4)\\
&\int x^s \,\mathrm{d}x = \frac{x^{s+1}}{s+1}\,, s \neq -1\\
&\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln x\\
&\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\\
&\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x\\
&\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x\,.
\end{aligned}$$

Da so izračunani nedoločeni integrali, torej primitivne funkcije, res pravilni, se najlažje prepričamo tako, da jih odvajamo, pri čemer moramo dobiti podintegralske funkcije.

17.3 Pravila integriranja

Meje

Integriramo lahko od prve meje k drugi ali obratno. Prav tako lahko integriramo od prve meje do neke vmesne meje in nato od te vmesne meje do druge meje. Skoraj samoumevno velja:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b u \,\mathrm{d}x = -\int_b^a u \,\mathrm{d}x \qquad (17.5)\\
&\int_a^b u \,\mathrm{d}x + \int_b^c u \,\mathrm{d}x = \int_a^c u \,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Sestavljene funkcije

Ker je integriranje nasprotna operacija od diferenciranja oziroma odvajanja, so z znanimi pravili za odvajanje sestavljenih funkcij (16.13–17) določena tudi ustrezna pravila za integriranje.

Pravilo za odvod s konstanto pomnožene funkcije integriramo na obeh straneh: $\int (cu)' \,\mathrm{d}x = \int cu' \,\mathrm{d}x$. Integral na levi strani je, po definiciji, enak cu. Da bo tudi integral na desni strani tak, mora biti enak $c\int u'\,\mathrm{d}x$. Odvod poljubne funkcije je pravzaprav tudi poljubna funkcija, zato ni škode, če v končnem rezultatu namesto u' zapišemo kar u (s tem smo poljubno funkcijo zgolj preimenovali) in dobimo:

$$\int cu\,\mathrm{d}x = c\int u\,\mathrm{d}x\,. \tag{17.6}$$

Pravilo za odvod vsote integriramo na obeh straneh: $\int (u+v)'\,\mathrm{d}x = \int (u'+v')\,\mathrm{d}x$. Integral na levi je, po definiciji, enak $u+v$. Da bo tak tudi integral na desni, mora biti enak $\int u'\,\mathrm{d}x + \int v'\,\mathrm{d}x$, to je, veljati mora

$$\int (u\pm v)\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}x \pm \int v\,\mathrm{d}x\,. \tag{17.7}$$

Integriranje po delih

Pravilo za odvod produkta integriramo na obeh straneh, pri čemer uporabimo že znano pravilo o integralu vsote: $\int (uv)'\,\mathrm{d}x = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$, kar takoj vodi do izreka

$$\int u'v\,\mathrm{d}x = uv - \int uv'\,\mathrm{d}x\,. \tag{17.8}$$

Če je torej podintegralska funkcija produkt dveh funkcij, od katerih znamo integrirati eno, jo integriramo samostojno, nakar jo integriramo še enkrat, tokrat pomnoženo z odvodom druge funkcije. Pravimo, da *integriramo po delih*. Tako, na primer, izračunamo integral funkcije $x\cdot\sin x$ ali $x\cdot \mathrm{e}^x$, pri čemer integriramo kotno ali eksponentno funkcijo, linearno funkcijo pa odvajanje v naše zadovoljstvo zradira v konstanto.

Zamenjava spremenljivke

Integracija verižnega pravila za odvajanje posredne funkcije pove: $\int u'(x)\,\mathrm{d}x = \int u'(v)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$. Upoštevamo $v'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$, spremenimo oznako u' v u in dobimo

$$\int u(x)\,\mathrm{d}x = \int u[v(x)]\,\mathrm{d}v\,. \tag{17.9}$$

S tem pravilom o *zamenjavi spremenljivke* močno razširimo nabor funkcij, ki jih zmoremo integrirati. Dober zgled je integral $\int \sin(kx)\,\mathrm{d}x$. Takoj vidimo: če bi za diferencial imeli $\mathrm{d}(kx)$, bi imeli opravka z obliko $\int \sin t\,\mathrm{d}t$, ki jo znamo integrirati. Pa vstavimo faktor k pod diferencial! Ker $\mathrm{d}(kx) = k\,\mathrm{d}x$, smo s preoblikovanjem diferenciala posledično pomnožili podintegralski izraz s k, zato ga moramo s k še deliti, pa dobimo $(1/k)\int \sin(kx)\,\mathrm{d}(kx)$. Opisanemu postopku za zamenjavo spremenljivke rečemo "spravljanje pod diferencial".

17.4 Integriranje vrst

Integrabilnost

Če nihče ne bi vedel, da je odvod $\ln x$ enak $1/x$, potem nikakor ne bi vedeli, kako integrirati $\int \mathrm{d}x/x$. To nas opominja na naslednje: nobene funkcije ne moremo integrirati, če je poprej nismo pridelali z diferenciranjem česa drugega. Tako, na primer, še nikomur do sedaj ni uspelo – z znanimi funkcijami – integrirati $\int \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$. Kaj storiti v takem primeru? Integral – ki je funkcija zgornje meje – lahko uporabimo kot definicijo te funkcije in jo poimenujemo z novim imenom, recimo $\operatorname{erf}(x)$. Seveda je ta definicija zgolj formalna vse dotlej, dokler ne najdemo poti, kako za vsak x zares izračunati pripadajoči $\operatorname{erf}(x)$.

Integriranje vrste

Pri iskanju poti, kako integrirati "neintegrabilno" funkcijo, se spomnimo, da jo pravzaprav lahko razvijemo v potenčno vrsto (16.18) in členoma integriramo. Integriranje potenc je namreč preprosto. Integrirana vrsta je tudi potenčna in konvergira, v kar se prepričamo s konvergenčnim testom. Tako funkcijo, ki smo jo sprva definirali preko integrala, efektivno redefiniramo preko ustrezne vrste.

Številska vrsta za π

Seveda lahko z razvojem v potenčne vrste integriramo tudi "integrabilne" funkcije. Na zanimiv primer naletimo, ko hočemo integrirati funkcijo $1/(1+x^2)$, ki je odvod funkcije arkus tangens, $\operatorname{atan}(x)$. (To ugotovimo, ko izračunamo odvod funkcije tangens kot kvocienta funkcij sinus in kosinus, nakar izračunamo še odvod k tangensu inverzne funkcije.) Ko jo razvijemo v binomsko vrsto in členoma integriramo, dobimo vrsto za $\operatorname{atan}(x)$, ki konvergira za $|x| \le 1$. Vemo, da $\tan(\pi/4) = 1$, zato $\pi/4 = \operatorname{atan}(1)$ in vrsta pove:

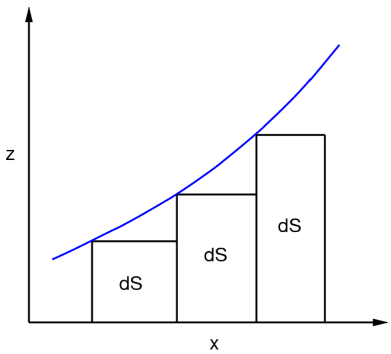
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \tag{17.10}$$

Dobili smo način, kako izračunati število π na toliko decimalnih mest, kot želimo. Konvergenca je sicer počasna, vendar zanesljiva.

17.5 Uporaba v geometriji

Enačba $u = f(x)$ opisuje odvisnost dveh splošnih spremenljivk. Naj bosta do nadaljnjega to dve konkretni spremenljivki in sicer dve pravokotni ravninski koordinati: vodoravna x in navpična z. Enačba $z = f(x)$ tedaj opisuje pravo, geometrijsko krivuljo v navpični ravnini, recimo parabolo $z = x^2$. Kaj lahko v tem primeru povemo o integriranju?

Ploščina pod krivuljo



Slika 17.2 Ploščina pod krivuljo. Seštevek diferencialov dS je enak ploščini pod krivuljo $z(x)$, če so le diferenciali dovolj majhni.

Nad vsakim diferencialom dx je "naložen" ozek trak, segajoč do krivulje. Tak trak, aproksimiran s pravokotnikom, ima ploščino $\mathrm{d}S = z\,\mathrm{d}x$, in vsota vseh tovrstnih ploščin je enaka celotni ploščini pod krivuljo. Velja

$$S = \int z \, \mathrm{d}x \, . \tag{17.11}$$

Tako računamo ploščine krivočrtnih likov. Paziti moramo le na to, da je ploščina nad abscisno osjo pozitivna in pod to osjo negativna. Ploščina pod sinusno krivuljo med koordinatama 0 in 2π, na primer, je zato enaka nič.

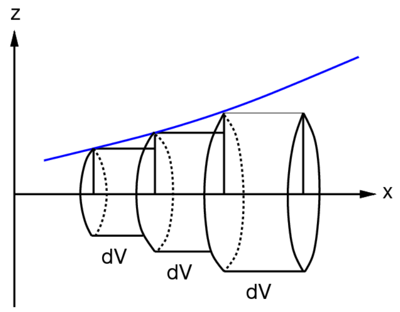
Trivialen primer je premica skozi izhodišče: $z = (h/a)x$. Integral za izračun ploščine ima rešitev $S = (h/a)x^2/2$. Če $x = a$, velja $S = ah/2$, kakor se za ploščino trikotnika tudi spodobi.

Prostornina vrtenine

Če pozitiven kos krivulje zavrtimo okrog abscisne osi, zarišemo rotacijsko telo, vrtenino. Okrog vsakega diferenciala $\mathrm{d}x$ je zdaj "razprostrt", kakor ražnjič na palici, prostorninski element vrtenine. Ta ražnjič, aproksimiran z valjem, ima prostornino $\mathrm{d}V = \pi z^2 \, \mathrm{d}x$ in prostornina celotne vrtenine znaša

$$V = \pi \int z^2 \, \mathrm{d}x \, . \tag{17.12}$$

Tako določamo prostornino vrtenin.



Slika 17.3 Prostornina vrtenine. Seštevek diferencialov dV je enak prostornini vrtenine pod krivuljo $z(x)$, če so le diferenciali dovolj majhni.

Preprost zgled je stožec: to je premica $z = (r/h)x$, zavrtena okrog abscisne osi. Pri razdalji h je visoka r in dolga l. Integracija od 0 do h potrdi že znana rezultata $S = \pi rl$ in $V = \pi r^2 h/3$. □