19 Sile in gibanje

Teža in pospešek – Teža in masa – Gibalni zakon – Izračuni gibanja – Vpliv trenja na gibanje – Inercialni sistemi – Vrteči se sistem – Energija pri gibanju – Splošna gravitacija – Gravitacijsko polje – Gibanje po osončju – Plimovanje snovi

19.1 Teža in pospešek

Dvigalo

V dvigalu, ki se giblje enakomerno navzgor ali enakomerno navzdol glede na stavbo, padajo kroglice glede na steno dvigala z enakim pospeškom kot v stavbi: $g' = g$; črtica označuje pospešek glede na dvigalo. Tudi nihajni čas nihala je enak. In teža telesa, obešenega na vzmetni tehtnici, je prav tako enaka. Vse to ugotovimo s poskusi.

Pospešeno dvigalo

Ko se dvigalo iz mirovanja pospešuje navzgor s stalnim pospeškom a, opazovalec v njem izmeri – iz prostega pada kroglic glede na steno dvigala ali, bolje, iz nihanja nihala – večji lokalni pospešek padanja: $g' = g + a$. Tudi teža predmetov, kakor jo kaže vzmetna tehtnica, je povečana. Obratno je pri pospeševanju iz mirovanja navzdol: lokalni pospešek padanja je manjši: $g' = g - a$. Tudi teže teles se zmanjšajo. Teža torej ni nespremenljiva, ampak je odvisna od kraja in gibanja opazovalnega sistema. V pospešenem dvigalu je drugačna kot v "mirujoči" stavbi. Poseben mejni primer je dvigalo, ki prosto pada. V njem opazovalec ne bi izmeril nobenega pospeška in telesa, vključno z opazovalcem, ne bi imela nobene teže. To lepo vidimo, ko z mosta skočimo v reko in pri tem v rokah držimo žogo.

19.2 Teža in masa

Masa telesa

Poskusi v dvigalih in zunaj njih – bolj v mislih kot zares – pokažejo, da je teža F_g izbranega telesa (merjena z vzmetno tehtnico) vedno sorazmerna z lokalnim pospeškom padanja g (merjenim z nihalom):

$$F_g = mg\,. \qquad (19.1)$$

To je *težna enačba* (Newton). Sorazmernostni koeficient m je za izbrano telo vedno in povsod enak, je torej njegova nespremenljiva lastnost. Ne spreminja se nikdar, razen če telesu dodamo ali odvzamemo kaj snovi. Poimenujemo ga *masa*. Ker je masa lastnost telesa, teža pa je očitno odvisna tako od telesa kot od okolja, proglasimo maso za osnovno količino in težo za izpeljano. Tako deklariramo, da ima 1 dm^3 vode maso 1 *kilogram* (kg); težo masne enote 1 kg pri lokalnem pospešku 1 m/s^2 (če je kje tak kraj) poimenujemo 1 *newton* (N); in za težo masne enote 1 kg pri pospešku 9,8 m/s^2, torej za težo 9,8 newtona, obdržimo pomožno ime kilopond. Vzmetna tehtnica torej meri težo telesa, vzvodna pa njegovo maso preko primerjave dveh tež, saj sta pospeška na obeh straneh tehtnice enaka. Masi 10^3 kg bomo priložnostno rekli tudi 1 tona (t).

Izpeljane enote

Zdaj, ko smo vpeljali novo enoto za silo – newton, zapišimo še druge enote, ki se z njo izražajo. Tlak $p = F/S$ dobi, na primer, enoto N/cm^2. Enota 10 N/cm^2 je zelo blizu enoti 1 kp/cm^2 in jo poimenujemo na kratko *bar*. Tisočkrat manjši je *milibar*. Povprečni zračni tlak na morski gladini, torej 1,03 kp/cm^2 oziroma 1 atmosfera [10.3], znaša 1013 milibarov. Če nismo preveč natančni, so kp/cm^2, bar in atmosfera kar sinonimi. Delo $A = Fs$ izrazimo z newton-metri in to enoto poimenujemo *joule*: Nm = J. Prav takšno enoto dobi tudi težna energija. In moči, torej delu na časovno enoto $P = A/t$, pritiče enota joule na sekundo, kar na kratko poimenujemo *watt*: J/s = W.

Gostota telesa

Po zgledu specifične teže σ (9.3) definiramo še *specifično maso* snovi

$$\rho = \frac{m}{V} \,. \tag{19.2}$$

Krajše ji rečemo *gostota*. Očitno velja

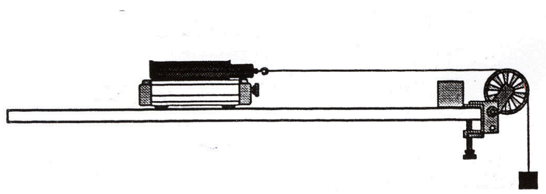
$$\sigma = \rho g \,. \tag{19.3}$$

Že poznane specifične teže snovi, izmerjene pri težnem pospešku 9,8 m/s^2 in izražene v kp/dm^3, so torej številsko natanko enake gostotam, izraženim v kg/dm^3.

19.3 Gibalni zakon

Vzdolžna sila

Na vodoravnem tiru naj miruje voziček z maso m in z lahkimi kolesi. Privežemo ga na vrvico, jo speljemo preko lahkega škripca in nanjo obesimo utež z maso μ. Utež začne padati in voziček se začne premikati, oba z istim, stalnim pospeškom a. Pospešek izmerimo z metrom in uro štoparico.



Slika 19.1 Gibanje vozička pod vplivom stalne sile. Voziček se giblje enakomerno pospešeno. Pospešek vozička je sorazmeren s silo nanj in obratno sorazmeren z njegovo maso. Prikazana je skica šolskega poskusa. (Pasco Scientific)

Na padajočo utež pogledamo kot na mirujočo utež v padajočem dvigalu (v katerem znaša lokalni pospešek padanja $g' = g - a$), zato vleče utež vrvico s silo $\mu(g - a)$. Ta sila se – presenetljivo – pokaže za enako produktu ma:

$$\mu(g - a) = ma \,. \tag{19.4}$$

Seveda bi lahko voziček namesto s padajočo utežjo vlekli z roko ali potiskali s pihanjem zraka ali še kako drugače. Rezultat zato posplošimo na vse vrste sil in ter postuliramo: kadar se telo mase *m* giblje s pospeškom *a*, deluje nanj naslednja sila v isti smeri kot pospešek:

$$F = ma = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,. \tag{19.5}$$

To je *gibalni zakon* (NEWTON). Čim večja je masa telesa in čim večji pospešek doživlja telo, tem večja sila deluje nanj. Ob delovanju "enako velike" sile pa doživlja telo tem manjši pospešek, čim večjo maso ima. Masa telesa torej ne določa le, kako je telo težko, ampak tudi, kako se upira spremembi gibanja, to je, kako je vztrajno. Rekli bomo, da se masa kaže kot *težka masa* ali *vztrajna masa*.

Poševna sila

Kadar sila ne deluje vzporedno s hitrostjo, ampak poševno nanjo, je gibanje krivočrtno. Gibanje tedaj obravnavamo kot sestavljeno iz dveh (ali treh) komponent vzdolž dveh (ali treh) koordinatnih osi. Te so med seboj pravokotne. Usmerjene so lahko poljubno, vendar raje izberemo takšne, da je računanje lažje. Zgled je poševni met kamna z vodoravno in navpično komponento. Za vsako komponetno posebej velja gibalni zakon:

$$\begin{aligned} F_x &= m\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ F_z &= m\,\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\,. \end{aligned} \tag{19.6}$$

V vsakem trenutku sta pospešek in sila določena s hipotenuzno vsoto svojih komponent. Sila je zato vedno enako usmerjena kot pospešek in velikost sile je sorazmerna z velikostjo pospeška.

Sila je torej, po postulatu, določena s pospeškom. S tem dosedanjo definicijo sil v mirovanju razširimo na definicijo pri gibanju, namreč preko pospeškov, in jih tako tudi merimo. Na kakšnem območju zakon velja – pri katerih masah in hitrostih – bo pa morala pokazati njegova uporaba. Zaenkrat ne vidimo nobenih omejitev.

19.4 Izračuni gibanja

Gibalni zakon služi za določitev sile iz izmerjenega gibanja. Če pa že poznamo silo, lahko izračunamo gibanje. Naredimo to za najpreprostejše sile, vzporedne s hitrostjo.

Ničelna sila

Pri saneh na ledeni ploskvi je sila v vodoravni smeri $F = 0$. Gibalni zakon se torej glasi $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$. To je enačba, v kateri nastopajo diferenciali spremenljivk, zato ji rečemo *diferencialna enačba*. Če vanjo vstavimo pravo funkcijo, se enačba spremeni v identiteto. Tedaj rečemo, da je ta funkcija rešitev diferencialne enačbe.

Kako naj najdemo rešitev zapisane enačbe? Pove nam sama. Pravi namreč, da je odvod iskane funkcije enak nič, torej mora biti ta funkcija konstanta: $v = v_0$. Ko sedaj poznamo hitrost, izračunamo še lego, in sicer iz definicijske enačbe za hitrost: $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v$. To je spet diferencialna enačba. Zapišemo jo kot $\mathrm{d}x = v_0\,\mathrm{d}t$ (ločimo spremenljivki) in integriramo, pa dobimo enakomerno gibanje $x = x_0 + v_0 t$ s poljubno začetno lego x_0 in hitrostjo v_0.

Sila teže

Padajoči kamen čuti silo $F = -mg$. Negativni predznak upošteva, da smo vertikalno os usmerili navzgor. Ustrezajočo diferencialno enačbo $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -g$ preuredimo z ločitvijo spremenljivk, integriramo in dobimo hitrost v, nakar iz nje na že znani način pridelamo enakomerno pospešeno gibanje $z = z_0 + v_0 t - gt^2/2$. Začetna lega in hitrost sta poljubni; pozitivna hitrost opisuje met navzgor in negativna met navzdol. Rezultat potrjuje, da vsa telesa padajo enako.

Gugalna sila

Točkasto nihalo z dolžino l in maso m čuti pri majhnem odmiku x silo $F = -mg \cdot x/l$. Gibalna enačba ima zato obliko $x'' = -(g/l)x$. Pravi torej, da je drugi odvod iskane funkcije enak tej funkciji, le z nasprotnim predznakom. Ali poznamo takšno funkcijo? Da, sinus in kosinus. Obe sta rešitvi. Katero izberemo, je odvisno od tega, od kje želimo šteti čas – v središčni legi ali v amplitudi. Izberemo sinus in vstavimo nastavek $x = x_0 \sin \omega t$ v enačbo, pa ugotovimo, da je to prav, ako $\omega = \sqrt{(g/l)}$. Tako tudi mora biti (18.12). Napovedano nihanje ni odvisno od mase.

Sila vzmeti

Gibalni zakon za vse prikazane primere napove gibanja, ki jih poznamo že od prej in se ujemajo s poskusi. To močno okrepi zaupanje v njegovo veljavnost. Pravo moč pa zakon seveda dobi, ko z njim rešimo kakšen nov problem. Naj bo to utež, obešena na lahki vzmeti. Kako se utež giblje, ko jo povlečemo iz ravnovesne lege navzdol in jo spustimo?

Poskus pove, da je sila vzmeti odvisna od raztezka s; pri majhnih raztezkih velja kar sorazmernost: $F = ks$; konstanta k je odvisna od snovi, oblike in velikosti vzmeti. Ko na vzmet obesimo utež z maso m, se raztegne za s v ravnovesno lego. Tam je vsota vseh sil na utež enaka nič: $ks - mg = 0$. Pri odmiku za z iz ravnovesne lege deluje na utež sila $F = k(s - z) - mg = -kz$. Ustrezna enačba gibanja je zato $z'' = -(k/m)z$. To je prav takšna enačba kot pri gugalni sili. Enake enačbe imajo enake rešitve: utež torej niha s frekvenco $\omega = \sqrt{(k/m)}$. Za razliko od prej pa je frekvenca odvisna od mase. Rezultat potrdimo s poskusom. Uporaben je tudi za določanje konstante vzmeti iz izmerjenega nihajnega časa.

19.5 Vpliv trenja na gibanje

Pri vseh izračunih gibanja smo zanemarili vpliv trenja. Vemo pa, da trenje s podlago in upor zraka zaustavljata gibanje. Raziščimo podrobnosti!

Trenje najlaže preučimo s primernim telesom, recimo z lesenim kvadrom, ki ga vlečemo z vzmetnim silomerom po vodoravni podlagi. — Kvader se ne premakne, dokler vlečna sila ne doseže neke mejne vrednosti. S tem je določena njej nasprotna *maksimalna sila lepenja*. Poskus pokaže, da je sorazmerna z normalno silo, s katero kvader deluje na podlago: $F_l = k_l F_\perp$. Normalna sila je seveda kar teža kvadra. Sorazmernostni koeficient je odvisen od vrste in gladkosti stičnih površin. Za jeklo na jeklu znaša kakšnih 0,8. Sila lepenja ni odvisna od velikosti stične ploskve. — Ko se kvader premakne, je za vzdrževanje njegovega enakomernega gibanja potrebna določena sila. S to silo je določena njej nasprotna *sila trenja*, ki je nekaj manjša od sile lepenja. Tudi sila trenja je sorazmerna z normalno silo: $F_t = k_t F_\perp$. Sorazmernostni koeficient za trenje je nekaj manjši kot za lepenje. Za jeklo na jeklu znaša kakšnih 0,6. Sila trenja ni odvisna od velikosti stične ploskve, niti od hitrosti vleke.

Zračni upor je bolj zamotan. Odvisen je namreč od oblike telesa in od njegove hitrosti. To lepo čutimo, ko se s sanmi spuščamo po dolgem in strmem klancu. Upor narašča s hitrostjo. Dokler je hitrost majhna, je morda dobra kar linearna odvisnost $F_u \propto v$. Sorazmernostni koeficient je gotovo odvisen od oblike in razsežnosti telesa. Podrobnejše raziskave moramo pustiti za prihodnost.

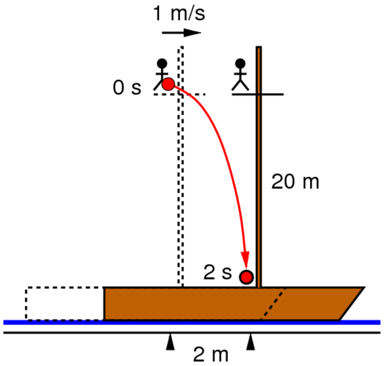
Vpliv trenja in zračnega upora na gibanje teles je očiten. Vodoravno drseče sani se prej ali slej ustavijo. Prosto padajoče telo ali telo na klancu se čedalje manj pospešujeta in se na koncu gibljeta enakomerno. Odmiki nihala – težnega ali vzmetnega – pa se počasi zmanjšujejo, dokler se nihalo povsem ne ustavi. Vse to bi sicer lahko izračunali iz enačbe gibanja (19.5), v katero bi vstavili sili trenja in upora, vendar bomo raje počakali, dokler obeh ne spoznamo bolj natančno.

19.6 Inercialni sistemi

Relativnost gibanja

Preučevano gibanje, recimo prosti pad kamna, se ne da opisati drugače kot relativno glede na kakšen koordinatni sistem. Pojavi se vprašanje, kako bi isto gibanje opisali v kakem drugem *opazovalnem sistemu*.

Ob pomolu naj pluje ladja z enakomerno hitrostjo. V opazovalnem košu na vrhu jambora sedi mornar. Iz rok mu pade jabolko. Glede na ladjo pada jabolko premočrtno in navpično vzdolž jambora, glede na pomol pa zariše parabolo vodoravnega meta. Kako se telesa gibajo, je torej odvisno od tega, v katerem opazovalnem sistemu jih gledamo. Rečemo, da je gibanje relativno.



Slika 19.5 Padec jabolka z jambora. Ladja se glede na pomol giblje premo in enakomerno. Glede na ladjo pada jabolko navpično navzdol, vseskozi tik ob jamboru. Glede na pomol pa opiše parabolo.

Transformacija gibanja

Ladja in pomol sta zgled dveh opazovalnih sistemov, ki se drug glede na drugega gibljeta premočrtno in s stalno hitrostjo. Rečemo, da sta to *inercialna sistema*. Vzdolž "mirujočega" pomola naj poteka os x in vzdolž "gibajoče se" ladje os x'. Osi z in z' naj bosta usmerjeni navpično navzgor. Čas štejemo z dvema urama: eno ima opazovalec na pomolu in drugo mornar na krovu ladje. Oba časa, t in t', začnemo šteti, ko sovpadata izhodišči obeh sistemov, recimo steber na pomolu in jambor na ladji. Takrat – in kasneje – se naj izhodišče ladje giblje s hitrostjo u glede na pomol, kakor jo izmeri tamkajšnji opazovalec.

Čas kakega dogodka, recimo pristanek galeba na gladino morja, izmerita opazovalca vsak s svojo uro. Brez presenečenja ugotovita, da zmeraj velja

$$t' = t\,. \tag{19.7}$$

Rečemo, da teče čas v obeh sistemih enako, da je *absoluten*. Vseeno je, s katerim časom potem dogodke opisujemo.

Lego kakšnega telesa, recimo galeba na gladini morja, ob času t opišemo v prvih ali drugih koordinatah, (x,z) ali (x',z'). Med obema sedlamo takole:

$$\begin{aligned} x' &= x - ut \\ z' &= z\,. \end{aligned} \tag{19.8}$$

Za vodoravne in navpične hitrosti – odvode ustreznih koordinat po času – velja

$$\begin{aligned} v_x' &= v_x - u \\ v_z' &= v_z\,. \end{aligned} \tag{19.9}$$

Pospeški opazovanega telesa vzdolž katerekoli osi – odvodi hitrosti po času – so pa v obeh sistemih enaki:

$$\begin{aligned} a_x' &= a_x \\ a_z' &= a_z\,. \end{aligned} \tag{19.10}$$

To pomeni, da opazovalec v prvem opazovalnem sistemu meri enake sile kot v drugem. Opazovalec na ladji, zaprt v podpalubju, zato iz gibalnih poskusov nikakor ne more ugotoviti, ali ladja miruje ali se enakomerno giblje.

19.7 Vrteči se sistem

Opazovalna sistema se lahko drug glede na drugega gibljeta tudi neenakomerno; na primer pospešeno dvigalo ali dvoriščni vrtiljak z navzgor usmerjeno osjo vrtenja. Podrobneje poglejmo vrtiljak, ki se – gledano od zgoraj – vrti v nasprotni smeri urinega kazalca!

Sredobežna sila

Krogla, ki je z vrvico privezana na os vrtenja in miruje glede na tla vrtiljaka, glede na dvorišče enakomerno kroži. Opazovalec na dvorišču sklepa takole: krogla se giblje pospešeno, saj se ji spreminja smer, zato mora nanjo delovati sila v smeri radialnega pospeška (18.17), torej sila

$$F = m\omega^2 r \tag{19.11}$$

proti osi vrtenja. To je sila vrvice na kroglo. Rečemo ji *sredotežna sila* (HUYGENS). Opazovalec na vrtiljaku pa sklepa drugače: krogla miruje, zato mora biti vsota vseh sil nanjo enaka nič. Eno je neka sila, reče ji *sredobežna sila*, ki vleče kroglo proti robu, drugo je pa nasprotna sila vrvice na kroglo. Sredobežna sila je za opazovalca sestavni del njegovega sveta: zdi se, da robne stene privlačijo mirujoča telesa in to tem bolj, čim bližje so jim. Opazovalec lahko sredobežno silo izmeri z vzmetno tehtnico in dobi enako velikost, kot dvoriščni opazovalec izračuna za sredotežno silo.

Odklonska sila

Krogla, ki jo opazovalec na vrtiljaku zakotali iz sredine v radialni smeri, se za dvoriščnega opazovalca giblje premočrtno in enakomerno glede na dvorišče. Zato sklepa, da je vsota sil nanjo enaka nič. Opazovalec na vrtiljaku pa vidi, da ta krogla po tleh vrtiljaka začrta pot, ki je ukrivljena proti desni. Podobno se zgodi s kroglo, ki jo zakotali s kateregakoli mesta na vrtiljaku v katerokoli smer. Opazovalec na vrtiljaku zato sklepa, da v njegovem svetu na vsako vodoravno gibajoče se telo deluje sila, usmerjena desno pravokotno na smer gibanja. To silo poimenuje *odklonska sila*. Kolikšna je?

Vrtiljak opremimo s koordinatnim križem (x',y') in dvorišče s križem (x,y). Os vrtiljaka je izhodišče obeh križev. Vrtiljakov križ se vrti, zato katerikoli njegovi koordinati (kjer je krogla) izrazimo z dvoriščnimi takole: $x' = x\cos\omega t$ in $y' = y\sin\omega t$. Enačbi dvakrat odvajamo po času. Členi, ki vsebujejo dvoriščne pospeške, so enaki nič, saj je gibanje premo enakomerno. Preostanejo členi, od katerih so eni odvisni od dvoriščne hitrosti in drugi od dvoriščne lege. Prvi so komponente odklonskega pospeška in drugi komponente sredobežnega pospeška. Iz obeh komponent odklonskega pospeška sledi njegova velikost in ko jo pomnožimo z maso, še iskana sila (CORIOLIS):

$$F = 2m\omega v\,. \tag{19.12}$$

Hitrost v je merjena glede na vrtiljak. Sila deluje pravokotno nanjo.

Enakopravnost sistemov

Dvoriščni opazovalec trdi, da se vrtiljak vrti. Vendar lahko tudi opazovalec na vrtiljaku trdi, da se pravzaprav vrti dvorišče. Ali sta sistema res enakopravna? Nista. Na dvorišču deluje na telo z maso sorazmerna sila, ki ima izvor v okolišnjih telesih, namreč Zemlji. Na vrtiljaku pa dve tovrstni sili, sredobežna in odklonska, nimata nobenega izvora v okolici. Pripisati jih moramo pospešenemu gibanju opazovalnega sistema.

Zemlja kot vrtiljak

Seveda živi tudi dvoriščni opazovalec na vrtiljaku: Zemlja se vrti okrog svoje osi in kroži okrog Sonca; in tudi Sonce se verjetno giblje krivočrtno glede na zvezde. Zaradi tega na Zemlji čutimo številne sistemske sile, vendar so vse majhne v primerjavi s privlakom Zemlje in so večinoma zanemarljive. Sredobežna sila na ekvatorju odvzema telesu manj kot 1 % teže in odklonska sila na topovsko kroglo na polu znaša tudi manj kot 1 % njene teže. Težni pospešek, ki ga merimo z nihalom, vedno vključuje vpliv vseh sredobežnih in odklonskih sil.

19.8 Energija pri gibanju

Tobogan

V zabaviščnih parkih gradijo podjetniki tobogane – zavite tire, polne hribov, dolin in stranskih zavojev, po katerih se z začetne višine spuščajo vozički s potniki. Tak voziček drsi po tiru in ima v vsaki točki poti neko višino in neko hitrost. Vožnje kažejo, da je hitrost v dolinah večja kot na hribih, in da se voziček nikakor ne more povzpeti višje, kot je bila njegova začetna višina. To nas spominja na nihalo in ni nič čudnega: saj je slednje pravzaprav le preprost tobogan. Pričakujemo torej, da sta hitrost in višina telesa pri obeh gibanjih – toboganskem in nihalnem – povezani na enak način. Poskusimo izpeljati to povezavo!

Slika 19.2 Sobni model tobogana – zavit tir, po katerem drsi voziček. Čim globlje se spusti, tem večjo hitrost pridobi. Če ne bi bilo trenja in zračnega upora, se gibanje ne bi nikdar ustavilo. (Anon)

Kinetična energija

Kratek kos tobogana je raven klanec. Na tamkajšnji voziček delujejo teža, tir, trenje, zračni upor in morda še kaj. Vsota vseh teh sil vzdolž klanca znaša $F_\parallel$ in velja gibalni zakon $F_\parallel = m\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$. Voziček se premakne vzdolž klanca za pot ds. Produkt sil in premika znaša $F_\parallel \mathrm{d}s = m(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)\mathrm{d}s = mv\mathrm{d}v$. Integriramo vzdolž zaporednih klancev od začetne točke 1 do končne točke 2 in dobimo:

$$\int F_\parallel\,\mathrm{d}s = \frac{mv_2{}^2}{2} - \frac{mv_1{}^2}{2} = \Delta K\,. \tag{19.13}$$

Zapisani integral je razširitev definicije dela, kakor smo ga že spoznali (9.12), in sicer od "uravnovešene" sile na "neuravnovešeno" silo. Seveda ga še naprej imenujemo delo. Je pa zdaj enako spremembi količine $K = mv^2/2$, ki jo poimenujemo *kinetična energija* vozička. Delo vseh sil, ki delujejo na telo, je torej enako spremembi njegove kinetične energije. To je *izrek o kinetični energiji*.

Izrek seveda vključuje tudi enakomerno potiskanje telesa po klancu navzgor. Tedaj delujeta na telo dve sili: potisk navzgor in teža navzdol. Sili sta nasprotno enaki, njuna rezultanta je enaka nič, zato sta enaka nič tudi celotno vloženo delo in sprememba kinetične energije.

Težna energija

K delu prispeva vzporedna komponenta teže $F_{g\|}$ in preostale tangentne sile $F_{other\|}$. Celotno delo zato zapišemo kot $\int (F_{other\|} + F_{g\|})\,ds$. Delo teže lahko izračunamo, saj $F_{g\|}ds = -mgdh$. Integriranje po katerikoli poti od točke 1 do točke 2 pove

$$-\int F_{g\|}\,ds = mgh_2 - mgh_1 = \Delta W\,. \quad (19.14)$$

Količina $W = mgh$ je stara znanka, težna energija telesa (9.12). Negativni predznak skrbi za to, da je pri spustu, ko je delo teže pozitivno, sprememba težne energije negativna, torej da se težna energija zmanjša. Vseeno je, kje izberemo izhodišče $h = 0$ za merjenje višine: na morski gladini, na dnu tobogana, na vrhu tobogana ali kje drugje. Štejejo le razlike višin, ki so neodvisne od izbire izhodišča. Pri gibanju po toboganu torej velja

$$\int F_{other\|}\,ds = \Delta K + \Delta W. \quad (19.15)$$

Delo vseh sil razen teže je enako spremembi kinetične in težne energije. To je *izrek o kinetični in težni energiji*. Če ni takih sil oziroma če so zanemarljive, je torej vsota kinetične in težne energije konstantna:

$$K + W = \text{const}\,. \quad (19.16)$$

Kinetično in težno energijo merimo istih enotah kot delo, torej v joulih.

Ohranitev energije

Vsoto kinetične in težne energije bomo poimenovali *mehanska energija*. Pri gibanju po tiru se ohranja, če ne motita trenje in zračni upor, sicer se pa zmanjšuje. Ni treba, da je tir gibanja določen s tračnicami, ampak ga lahko zarezuje telo samo pri prostem gibanju. Tako se mehanska energija ohranja pri vodoravnem drsenju, prostem padu, poševnem metu, drsenju po klancu, nihanju nihala, kroženju nihala in podobnem. Posebej za nihanje velja $K + W = {}^1/_2\, mv_0{}^2 = {}^1/_2\, m\omega^2 x_0{}^2$.

Namesto vozička lahko po klancu ali toboganu kotalimo kroglice. Hitrost kroglice opišemo s hitrostjo njenega središča v_*. Če pod kinetično energijo kroglice slepo razumemo $mv_*{}^2/2$, pa zapisani zakon o ohranitvi mehanske energije ne velja. Deli kroglice se namreč ne gibljejo vsi z isto hitrostjo kakor pri vozičku, ampak dodatno krožijo okrog središča. Te dele je bilo potrebno pospešiti in za to je gotovo potrebno nekaj dela. Zato pričakujemo, da je delo vseh sil večje od spremembe omenjene "narobne" kinetične energije. Drugače rečeno: kotaleča se krogla mora na dnu klanca imeti manjšo hitrost kot brez trenja drseč voziček. S tem tudi upravičimo dosedanjo zahtevo, naj imajo vozički lahka kolesa in naj jih vlečejo vrvice preko lahkih škripcev. Morda pa se da iznajti "pravo" kinetično energijo, za katero bo zakon veljal? Prepustimo to nalogo za prihodnje.

19.9 Splošna gravitacija

Doseg težnosti

Z drevesa pade jabolko na tla. Zakaj? Očitno ga privlači Zemlja in ko pecelj popusti, se začne jabolko gibati pod njenim vplivom. Ali bi jabolko padlo tudi z višjega drevesa? Seveda bi. Kaj pa, če bi bilo drevo zelo visoko – do kam pravzaprav sega težna privlačnost Zemlje? Ali z razdaljo kaj slabi? Morda sega celo do Meseca in še dlje? Kaj pa, če je Mesec sam takšno "jabolko", ki kroži – torej prosto pada – okrog Zemlje prav zaradi njene težne privlačnosti? In če Zemlja privlači Mesec, kaj nemara Sonce ne privlači planetov, ki krožijo okrog njega, s silo prav take vrste? In če Zemlja privlači Mesec, kaj ne privlači tudi Mesec Zemlje? Morda je pa takole: vsaki dve masni točki na svetu se medsebojno težno privlačita; silo poimenujemo *gravitacijska sila*.

Slika 19.3 Pad jabolka z jablane. Kip pripoveduje, kako je bojda prišlo do odkritja zakona o splošni gravitaciji. (Oxford Science Museum, Oxford)

Gravitacijska sila

Vemo, da planet mase m kroži okoli Sonca mase M po orbitalnem zakonu $r^3 / T^2 = \text{const}$. Radialni pospešek planeta znaša $a_\mathrm{r} = v^2/r = 4\pi^2 r/T^2$. Iz prve enačbe izrazimo T^2 in ga vstavimo v drugo, pa dobimo $a_\mathrm{r} \propto 1/r^2$. To je torej težni pospešek g, s katerim pada planet na Sonce. Gravitacijska sila Sonca na planet je zato $F_\mathrm{g} \propto m/r^2$. Mislimo si, da kroženje ustavimo. Gravitacijska sila ostaja nespremenjena. Enakopravnost obeh mas in zakon o vzajemnem učinku pa nas vodita na sklep, da za dve poljubni masni točki m in M na razdalji r velja

$$F_\mathrm{g} = \kappa \frac{mM}{r^2} \, . \tag{19.17}$$

To je *gravitacijski zakon* (NEWTON). Sorazmernostna *gravitacijska konstanta* κ pove, s kakšno silo se privlačita dve znani masi na znani oddaljenosti. Moramo jo še določiti.

Gravitacijska konstanta

Privlačna sila med dvema priročno velikima in težkima svinčenima kroglama je tako majhna, da je za naše dosedanje merilne pripomočke nezaznavna. Zato zaenkrat tudi ne moremo določiti gravitacijske konstante. Lahko jo pa ocenimo: namesto ene krogle (z izmerjeno maso) uporabimo kar celo Zemljo, ki ji maso ocenimo iz gostote in velikosti. Za gostoto vzamemo sredino med apnencem in železom, torej $5\,\mathrm{kg/dm^3}$, in dobimo za maso $\sim 5 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Predpostavimo, da je vsa ta masa zbrana v središču. Za drugo kroglo pa si mislimo kar kamen z maso 1 kg, za katerega vemo, da ga Zemlja privlači s silo 1 kp, oddaljenost med obema pa je enaka Zemljinemu radiju. Tako dobimo $\kappa \sim 7 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$.

19.10 Gravitacijsko polje

Jakost polja

Na to, da se dve točkasti telesi privlačita z gravitacijsko silo, lahko pogledamo tudi takole: prvo telo z maso M ustvarja okoli sebe polje gravitacijskega pospeška $g(r)$ in drugo telo z maso m, potopljeno v to polje, čuti gravitacijsko silo $F_\mathrm{g} = mg(r)$, odvisno od lokalnega pospeška. Velja torej

$$g = \kappa \frac{M}{r^2} \,. \tag{19.18}$$

Pospeški kažejo, kako je polje "močno", to je, s kakšno silo deluje na enoto mase. Zato bomo gravitacijskemu pospešku rekli tudi *jakost gravitacijskega polja*. Nadalje bomo rekli, da polje *izvira* iz teles oziroma da so telesa njegovi *izvori*. Čim večja je masa izvora, tem močnejše je njegovo gravitacijsko polje.

Sestavljeno polje

Vsako točkasto telo – od daleč gledana Zemlja, Mesec ali Sonce – je izvor krogelnega gravitacijskega polja. Ta polja se med seboj prepletajo in sestavijo v skupno, enovito polje. Jakost gravitacijskega polja v izbrani točki je paralelogramska vsota vseh posamičnih jakosti. Razsežna telesa – od blizu gledana Zemlja, na primer – pa si lahko mislimo kot sestavljena iz primerno majhnih "točkastih" delov in obdana z ustreznim poljem.

Polje slojevite krogle

Kakšno je gravitacijsko polje v bližini Zemlje? Sešteti bi morali prispevke vseh njenih delov, kar je kar hud zalogaj. Ponuja pa se naslednja drzna domneva: polje v bližini slojevite krogle je morda takšno, kot da bi bila vsa njena masa združena v središču. Pravzaprav smo to že uporabili, ko smo ocenjevali velikost gravitacijske konstante.

Če označimo pospešek na Zemljinem površju z g_0, njen polmer z R in nadmorsko višino s h, velja $g/g_0 = R^2/(R+h)^2$, torej

$g = g_0/(1 + h/R)^2$ oziroma za majhne višine – z razvojem v dva člena binomske vrste – $g = g_0(1 - 2h/R)$. Na najvišjih gorah je le za 0,3 % nižji kot ob morski gladini.

Različne krogle – Sonce in planeti – imajo seveda različne pospeške na svojem površju. Zanimajmo se le za relativne velikosti pospeškov, ne za absolutne, pa zapišimo $g \propto M/R^2$. Izpustili smo sorazmernostno konstanto κ. Vemo tudi, da velja $M \propto \rho R^3$, spet z izpuščeno sorazmernostno konstanto $4\pi/3$. Vstavimo drugo enačbo v prvo in dobimo $g \propto \rho R$ z nedoločeno sorazmernostno konstanto. Težni pospešek na površini krogle je torej sorazmeren z njeno gostoto in radijem. Privzemimo, da je Mesec enako gost kot Zemlja, a ima, kot vemo, 4-krat manjši polmer, zato je njegova gravitacija na površini 4-krat manjša kot Zemljina.

19.11 Gibanje po osončju

Kroženje planetov

Planet se giblje okrog Sonca približno po krožnici z radijem r in obhodnim časom t. Gravitacijska sila Sonca na planet (19.17) je enaka sredotežni sili kroženja (19.11). Izenačitev obeh in upoštevanje $\omega = v^2/r$ ter $v = 2\pi r/t$ pove:

$$\frac{t^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa M}\,. \tag{19.19}$$

To je že poznani orbitalni zakon (18.18), dopolnjen z informacijo, kaj se skriva za njim. Pravzaprav bi mu morali odslej reči izrek. Zapisani izrek omogoča, da izračunamo maso Sonca iz izmerjenega obhodnega časa in razdalje kateregakoli krožečega planeta, recimo Zemlje. Povsem isti zakon velja za kroženje Meseca okrog Zemlje. Velja $r_E{}^3/t_E{}^2 = \kappa M_S/4\pi^2$ in $r_M{}^3/t_M{}^2 = \kappa M_E/4\pi^2$. Delimo obe enačbi in dobimo $(r_E{}^3/t_E{}^2)/(r_M{}^3/t_M{}^2) = M_S/M_E$. Gravitacijska konstanta je izpadla. S (slabo) oceno, da je Zemlja oddaljena od Sonca 20-krat toliko kot Mesec [8.12], dobimo, da je masa Sonca vsaj 50-krat tolikšna kot masa Zemlje. Če pa je Sonce oddaljeno 100-krat toliko kot Mesec, je njegova masa skoraj 10^4-krat večja od Zemljine.

Ohranitev energije

Pri gibanju teles v homogenem gravitacijskem polju blizu Zemljine površine se ohranja njihova mehanska energija. Morda velja to tudi za gibanje teles po razsežnem krogelnem gravitacijskem polju Zemlje ali Sonca? Razmislek je podoben kot prej, le integral $\int F_{g\parallel} \mathrm{d}s$, s katerim je definirana težna energija, ima obliko $\int \kappa m M\, \mathrm{d}r/r^2$. Zato velja:

$$W = -\kappa \frac{mM}{r}\,. \tag{19.20}$$

Težna energija telesa v neskončnosti je enaka nič, sicer pa je negativna in to tem bolj, čim bliže je izvoru. Mehanska energija – vsota kinetične in težne – se ohranja. Če ima telo v gravitacijskem polju pozitivno mehansko energijo, ga bo zapustilo, če ne, bo ostalo vezano.

Ubežna hitrost

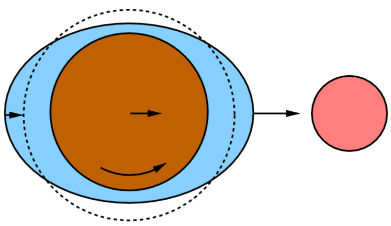
Z Zemlje izstrelimo topovsko kroglo navpično navzgor. Kako hitra mora biti, da zapusti Zemljo in ne pade več nazaj? Dovolj hitra, da se njena hitrost zmanjša na nič šele v neskončnosti. Mehanska energija na začetku in koncu je enaka: $K(R) + W(R) = K(\infty) + W(\infty)$. Oba desna člena sta enaka nič, zato $v = \sqrt{(2\kappa M/R)} = \sqrt{(2Rg)}$. Opazimo, da je ubežna hitrost $\sqrt{2}$-krat večja kot orbitalna hitrost [18.9]. Znaša ~ 11 km/s, kar je 30-krat več kot doseže krogla iz puške. Namesto navpično navzgor lahko streljamo vodoravno proti vzhodu; s tem pridobimo nekaj začetne hitrosti zaradi vrtenja. Na ekvatorju je to $\sim 0{,}5$ km/s.

Povezava med orbitalno hitrostjo pri izbranem radiju in ubežno hitrostjo s tega radija ne velja le za Zemljo kot privlačni center, marveč tudi za Sonce. S tem je določena tudi ubežna hitrost od Sonca za topovsko kroglo, ki jo izstrelimo z Zemlje in torej predtem kroži po Zemljinem tiru z njeno orbitalno hitrostjo. Če streljamo v pravi smeri, pridobimo del začetne hitrosti iz orbitiranja in vrtenja izstrelišča.

19.12 Plimovanje snovi

Plima in oseka

Kamen, ki leži na tleh, privlačijo Zemlja, Mesec, Sonce in vsa druga nebesna telesa. Ker pa jakost gravitacijskih polj hitro pada z oddaljenostjo od izvorov, je vpliv Zemlje močno prevladujoč. Morda je pa kje na Zemlji kakšno telo, ki bi le kazalo gravitacijske vplive od drugod? Spomnimo se morske plime in oseke, ki nastopata vsaka dvakrat dnevno in to s periodo 12,5 ur, kar je natanko polovica trajanja med dvema zaporednima kulminacijama Meseca. Ob ščipu in mlaju je plimovanje še posebej izrazito, ob prvem in zadnjem krajcu pa najšibkejše. Očitno imata tukaj prste vmes Mesec in Sonce, prvi bolj kot drugi.



Slika 19.5 Plima in oseka. Plimo povzroča gravitacijski privlak Meseca in Sonca. Prevladuje vpliv Meseca, ki je sicer manj masiven, a je mnogo bližje.

Razlaga je naslednja. Mesec privlači bližnjo stran Zemlje močneje kot njeno sredino, in oddaljeno stran šibkeje kot sredino, zato povzroči na obeh straneh po en vodni hrib. Medtem ko se Zemlja vrti, vzdržuje Mesec ta dva hriba pod sabo: premika se le oblika hriba, ne pa tudi voda, iz katere je zgrajen. To sta dva plimska vala in vmes sta dve oseki. V izbranem pristanišču bi morala plima nastati ob kulminaciji Meseca, vendar bolj ali manj kasni, odvisno od oblike obale in dna ter od oddaljenih ovir. Ob mlaju in ščipu delujeta Sonce in Mesec z iste oziroma nasprotne strani in plima je še posebej velika. Ob prvem in zadnjem krajcu pa delujeta Sonce in Mesec na Zemljo pod pravim kotom in njuna učinka se medsebojno slabita.

Plimske sile

Kakšna je razlika Mesečevih "plimskih" sil na sprednji in zadnji strani Zemlje? Drugače rečeno: koliko se gravitacijska sila spremeni, če se z razdalje r pomaknemo za kratko razdaljo $\mathrm{d}r$? Gravitacijsko polje Meseca odvajamo po razdalji in dobimo $\mathrm{d}g/\mathrm{d}r = -2\,\kappa\,M/r^3$. Polmer Meseca je 4-krat manjši od polmera Zemlje, zato ima (če je enako gost) $(1/4)^3$ njene mase. Razdalja $\mathrm{d}r$ je enaka Zemljinemu polmeru. Preostale količine so znane bolj ali manj natančno. S temi podatki izračunamo $\mathrm{d}g \sim 10^{-7}\,g_0$.

Plimske raztezne sile $\mathrm{d}F = m\mathrm{d}g$ so sorazmerne z maso izvora in padajo s kubom razdalje. Če bi nam bil Mesec bližje, bi Zemljino oceansko plast močneje "raztegoval". Plime bi bile ustrezno večje. Dvakrat bližji Mesec bi izvajal kar osemkrat večje plimske sile in s tem tudi plime!

Kakor povzroča Mesec plimovanje morja na Zemlji, tako bi tudi Zemlja povzročila plimovanje morja na Mesecu, če bi ga tam le kaj bilo. Vendar pa morje niti ni potrebno – plimske sile raztegujejo tudi trdnine. Ker pa so te težko raztegljive, so njihovi premiki ustrezno manjši.

Njihove posledice

Vsi planeti, ki krožijo okoli Sonca, čutijo njegove plimske sile: bližnji bolj, oddaljeni manj. Podobno velja za lune, ki krožijo okoli planetov. To ima zanimive posledice. — Plime ustvarjajo notranje trenje in počasi zavirajo vrtenje okoli lastne osi, vse dokler vrtilni čas ne postane enak orbitalnemu. Zemlja je svoj Mesec že tako zavrla: ni naključje, da nam kaže vedno eno in isto stran. Po drugi strani pa Mesec še ni uspel zavreti Zemlje. Brez dvoma se je Zemlja v preteklosti morala vrteti hitreje in se bo v prihodnosti vrtela počasneje kot danes. Na podoben način je morda tudi Sonce že zavrlo najbližji planet, Merkur. — Plimske sile stiskajo in raztezajo trdnino, jo gnetejo in s tem segrevajo. Morda Jupiter tako močno obdeluje svojo najbližjo luno, da se njena notranjost tali in bruha kot magma skozi razpoke. — Močne plimske sile lahko luno ali planet celo raztrgajo. Skozi daljnogled vidimo, da Saturn obkroža prstan. Morda je to raztrgana luna ali pa prastara drobna snov, ki je lastna gravitacija ne uspe, zaradi nasprotujočih plimskih sil, stisniti v luno. □