8 Prostor

Dolžina – Podobni trikotniki – Pravokotni trikotnik – Krog, lok in kot – Kotna razmerja – Triangulacija – Splošni trikotnik – Zemljemerstvo – Ploščina – Prostornina – Velikost Zemlje – Do nebesnih teles – Sončni sistem

8.1 Dolžina

Merjenje dolžine

Od dveh skupaj rastočih navpičnih dreves je eno krajše, daljše ali enako dolgo kot drugo. Ko kakšno drevo posekamo, pa se lahko vzdolž njega sprehodimo in pri tem štejemo korake. Tako njegovo dolžino l izmerimo. Merilna priprava so naše noge, dolžinska enota pa *korak*. Merimo tudi s *čevlji*, *sežnji*, *lakti*, *pedmi* in *palci*. Pri tem potiho privzamemo, da se uporabljana enota ne spreminja, ko jo premikamo z enega mesta drugam. Takšno merjenje povsem zadostuje lovcem in kmetovalcem.

Metrski etaloni

Z razvojem trgovine se pojavijo zahteve po uradni dolžinski enoti. Različne države izdelajo svoje etalone, to je trpežne palice izbrane dolžine, in jih shranijo v zakladnicah. Z njimi potem uradniki umerjajo druge merilne palice, metre. Tipični etalon je tako dolg kot vstran iztegnjena človeška roka od grodnice do konic prstov. Rekli bomo, da ima dolžino en *meter* (m).

Kratke dolžine merimo tako, da meter – kateregakoli pač že uporabljamo – razdelimo na 3 čevlje in čevelj na 12 palcev. Od daljših enot pa vpeljemo dvojni korak kot 5 čevljev in miljo kot 1000 dvojnih korakov.

Desetiška razdelba

Kmalu se pokaže, da je računanje z mešanimi dolžinskimi enotami nepregledno in težavno, zato raje razdelimo meter na 10 *deci*metrov (dm), 10^2 *centi*metrov (cm) ali 10^3 *mili*metrov (mm). Z njim tudi umerjamo daljše merilne vrvi. Razdaljo 10^3 metrov poimenujemo *kilo*meter (km). Večkilometrske razdalje merimo tako, da namesto polaganja palic po tleh raje vozimo kolo z izmerjenim obsegom in štejemo obrate s primernim števcem. Tako je mnogo bolj udobno.

Če so desetiške enote res tako primerne za računanje, zakaj jih potem nismo vpeljali tudi za čas in kot? V glavnem zato, ker se je merjenje časa in kotov začelo, še preden se je razvil decimalni zapis ulomkov, kasneje pa je bilo zatečeno stanje težko spremeniti. Bili so sicer poskusi, da bi dan razdelili na 10 ur, uro na 100 minut in minuto na 100 sekund, ter da bi četrtino kroga razdelili na 100 stopinj, vendar se žal niso uveljavili.

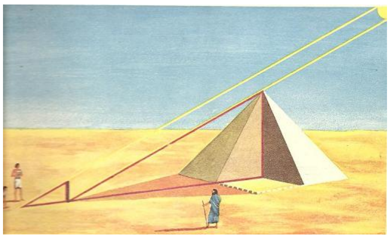
8.2 Podobni trikotniki

Dolžina sence

Navpično drevo in navpični gnomon hkrati mečeta po vodoravnih tleh vsak svojo senco. Drevo je višje od gnomona in meče daljšo senco. Ker so sončni žarki, ki obe senci rišejo, med seboj vzporedni, meče dvakrat višje telo po tleh tudi dvakrat daljšo senco. Drugače rečeno: razmerje med višinama b in b_0 dveh navpičnih teles je enako razmerju med dolžinama a in a_0 njunih vodoravnih senc, v kar se prepričamo z merjenjem:

$$\frac{a}{a_0} = \frac{b}{b_0}\,. \tag{8.1}$$

Če izmerimo dolžini gnomona in njegove sence, lahko iz izmerjene sence drevesa izračunamo njegovo višino, ne da bi jo bilo treba dejansko meriti z metrsko palico. Rečemo, da smo višino izmerili posredno.



Slika 8.1 Merjenje višine piramide iz dolžine njene sence. Razmerje višin piramide in palice je enako razmerju dolžin njunih senc. (Hogben, 1960)

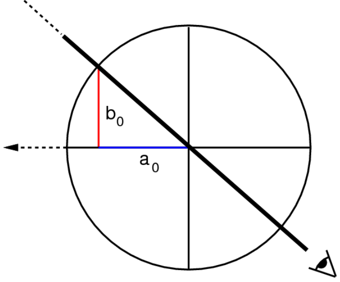
Spoznanje o razmerju višin in senc lahko posplošimo. Drevo, njegova senca in sončni žarki od vrha drevesa do vrha sence tvorijo *pravokotni trikotnik* s stranicami a, b in c. Isto velja za gnomon. Oba trikotnika sta si *podobna*, to je, imata enake kote. Pričakujemo, da so razmerja njunih istoležnih stranic enaka:

$$\frac{a}{a_0} = \frac{b}{b_0} = \frac{c}{c_0}\,. \tag{8.2}$$

To je *gnomonski izrek*. Velja tudi za poševne trikotnike. Tedaj mu rečemo *izrek o istoležnih stranicah* podobnih trikotnikov (TALES). Trditev dokažemo kar z merjenjem.

Viziranje teles

Ni treba čakati na senco, da ustvarimo podobne trikotnike za meritev višine drevesa. Na primernem mestu zabodemo v tla gnomon, ležemo in poiščemo tisto lego očesa, da se vrh gnomona in vrh drevesa pokrijeta. Rečemo, da smo vrh *vizirali*. Vlogo obeh senc prevzameta sedaj vodoravni oddaljenosti očesa od drevesa in od gnomona.



Slika 8.2 Astrolab kot vizirni trikotnik.

Še bolj priročno je, če namesto gnomona uporabimo astrolab. Postavimo se na primerno mesto in z namerilno palico astrolaba naciljamo vrh drevesa. Pri tem palica na obodu astrolabovega kroga označi točko, ki ima glede na astrolabovo središče vodoravno razdaljo a_0 in navpično razdaljo b_0. Rečemo, da sta to njeni *projekciji*. Projekciji tvorita pravokotni trikotnik, ki je podoben opazovanemu. K izračunani višini drevesa je potrebno dodati še višino astrolaba nad tlemi.

Namesto da po viziranju z astrolabom iz znane oddaljenosti drevesa izračunamo njegovo višino, lahko iz znane višine drevesa izračunamo njegovo oddaljenost. Tako tudi določimo, na primer, oddaljenost ladje na morju iz znane višine njenega jambora, ali oddaljenost ladje do pristanišča iz znane višine tamkajšnjega svetilnika.

8.3 Pravokotni trikotnik

Stranici a in b, ki v trikotniku oblikujeta pravi kot, imenujemo *kateti*. Povezuje ju tretja stranica c, *hipotenuza*, ki je od vseh najdaljša. Vsaka kateta oblikuje s hipotenuzo svoj ostri kot. Kot, ki leži nasproti stranici a, poimenujemo A, onega nasproti b pa B. Z dolžino katet sta oba ostra kota in dolžina hipotenuze enolično določeni.

Vsota kotov

Ko skozi oglišče B potegnemo vzporednico z nasproti ležečo stranico b, nastanejo tam trije koti, ki skupaj tvorijo iztegnjeni kot. Vidimo, da velja:

$$A + B = 90° . \tag{8.3}$$

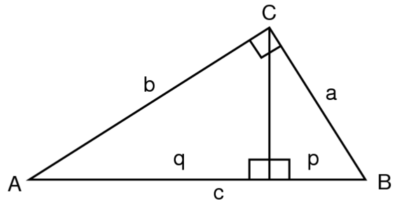
Če torej poznamo en kot, lahko drugega izračunamo.

Dolžina hipotenuze

V kmetijskih državah je potrebno zakoličevati polja. To delajo uradni zemljemerci. Njihovo osnovno orodje je dolga vrv z vozli v metrskih razmikih. Pri merjenjih – kot zemljemerci – opazimo, da je iz vrvi narejen trikotnik, katerega stranice merijo 3, 4 in 5 vozlov, pravokoten. Razmišljajoč o tem odkrijemo povezavo $3^2 + 4^2 = 5^2$. Mogoče velja takšna povezava za stranice v vsakem pravokotem trikotniku? Domnevamo torej

$$a^2 + b^2 = c^2 . \tag{8.4}$$

To je *hipotenuzni izrek* (PITAGORA). Če izrek drži, lahko iz katerekoli dvojice stranic izračunamo tretjo. Domnevo preverimo z meritvami in jo res potrdimo. S tem postane eksperimentalni zakon. Vendar nas to ne zadovoljuje in iščemo pot, kako bi ta zakon izpeljali iz kakšnih bolj osnovnih resnic. To tudi uspemo.



Slika 8.3 Pravokotni trikotnik za izpeljavo hipotenuznega izreka.

Postopamo takole. Iz pravega kota potegnemo navpičnico na hipotenuzo. Nastanejo trije pravokotni trikotniki, ki so si med seboj podobni. Po izreku o istoležnih stranicah (8.2) zato velja $a/c = p/a$ in $b/c = q/b$. Iz prve enačbe izrazimo a^2, iz druge b^2 ter obe enačbi seštejemo, pri čemer upoštevamo še $p + q = c$. Izrek smo dokazali.

Hipotenuzni izrek vsebuje produkte dolžin samih s seboj, na primer $3\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m}$. V takšnem produktu množimo številske vrednosti med seboj in enote med seboj, torej za navedeni primer $3^2\,\mathrm{m}^2$. Podobno naj velja za deljenje, potenciranje in korenjenje. Izraz $\sqrt{}(25\,\mathrm{m}^2)$, na primer, znaša $5\,\mathrm{m}$.

8.4 Krog, lok in kot

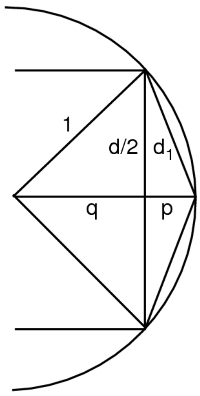
Obseg kroga

Kotomerni krog z večjim polmerom ima večji obseg. Če si mislimo krog sestavljen iz ozkih enakokrakih trikotnikov z vrhovi v središču, se njegovo povečanje pokaže kot podaljšanje krakov teh trikotnikov. Enakokraki trikotnik je sestavljen iz dveh enakih pravokotnih trikotnikov. Vsak podaljšani pravokotni trikotnik je podoben prvotnemu, zato je razmerje njunih kratkih stranic enako razmerju njunih hipotenuz. Če so trikotniki dovolj ozki, je vsota kratkih stranic trikotnikov kar enaka obsegu kroga. Obseg kroga C je zato sorazmeren s polmerom r oziroma s premerom $2r$:

$$C = 2\pi r\,. \qquad (8.5)$$

Sorazmernostni koeficient π določimo z neraztegljivo vrvico, ki jo nekajkrat navijemo na okroglo cev znanega premera in ji nato izmerimo dolžino: $\pi \approx 3{,}1$.

Kaj pa, če bi v krog včrtali pravilni mnogokotnik in mu izračunali obseg? Čim več oglišč bi imel tak mnogokotnik, tem manj bi se njegov obseg razlikoval od krogovega. Razmerje med mnogokotnikovim obsegom in premerom pa bi bilo potem dober približek k številu π.



Slika 8.4 Računanje števila π. Čim več oglišč ima krogu včrtani mnogokotnik, tem bolj se njegov obseg približuje obsegu kroga. Z zaporednim razpolavljanjem stranic gradimo čedalje gostejše mnogokotnike.

V krog polmera $r = 1$ včrtamo pravilni četverokotnik, torej kvadrat. Njegova stranica, določena s hipotenuznim izrekom

(8.4), znaša $d = \sqrt{2}$ in obseg 4-krat toliko. Ta obseg seveda še ni dovolj blizu krogovemu. Nad kvadratom zato začrtamo dvakrat gostejši mnogokotnik, torej osemkotnik, in skušamo izračunati njegovo stranico d_1 kot boljši približek proti obodu kroga. Ker $q^2 = 1 - (d/2)^2$, $p = 1 - q$ in $d_1{}^2 = (d/2)^2 + p^2$, velja $d_1{}^2 = 2 - 2\sqrt{(1 - d^2/4)}$. Obseg je 8-krat tolikšen. Uspeli smo. Nova stranica je odvisna samo od prejšnje. Izračunamo jo in postopek ponovimo z novo stranico kot izhodiščem. To nekajkrat ponovimo in dobimo dovolj tesen približek h krogu ter s tem vrednost $\pi = 3{,}14$.

Redefinicija kota

Enačba za obseg kroga (8.5) omogoča, da kot redefiniramo preko razmerja med lokom l in polmerom r krožnega izseka:

$$\varphi = \frac{l}{r}\,. \tag{8.6}$$

Tako definiran kot ima vrednosti med 0 in 2π. Pravi kot znaša $\pi/2$ in iztegnjeni kot je enak π. S tem postane dosedanja stopinja kar okrajšava za število $° = 2\pi/360 \approx 0{,}0175$. Kot ni več neodvisna količina, temveč postane izpeljana.

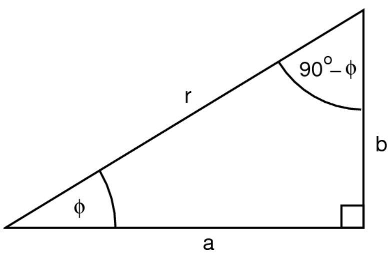
Lastnosti kroga

Ko se ukvarjamo z risanjem krogov in kotov, opazimo marsikakšno zanimivost. — Po obodu kroga nanašamo tetive, ki so enako dolge kot radij. Gre jih natanko šest. Tako krog razdelimo na šest enakih delov. — Nad premerom kroga narišemo trikotnik z vrhom kjerkoli na krožnici. Vsak tak trikotnik je pravokoten. Tako rišemo prave kote. — Nad tetivo narišemo trikotnik z vrhom v središču in drugega z vrhom na obodu. Središčni kot je dvakratnik obodnega. — Skozi tri točke, ki ne ležijo na isti premici, gre natanko en krog: točke povežemo v trikotnik, narišemo simetrale stranic in njihovo presečišče je središče tega kroga. Vse naštete izreke – in še mnoge druge – so ljudje uspeli dokazati, to je, jih izpeljati iz drugih, "bolj osnovnih" resnic (EVKLID). Nam zadostuje, da so eksperimentalno opažena dejstva.

8.5 Kotna razmerja

Kotne projekcije

Ko z astrolabom merimo višino drevesa, moramo določiti obe oddaljenosti (projekciji) a in b točke na obodu astrolabovega kroga s polmerom r od vodoravne in navpične osi skozi središče tega kroga.



Slika 8.5 Vizirni kot in pripadajoči pravokotni trikotnik. Razmerje med nasprotno stranico in hipotenuzo je enolično odvisno od kota.

Sinus, kosinus in tangens

To lahko naredimo vnaprej in enkrat za vselej za vsak kot φ. Najbolje je, da določimo razmerja b/r, a/r in b/a, saj so ta neodvisna od r. Simbolično zapišemo

$$\frac{b}{r} = \sin\varphi \qquad (8.7)$$
$$\frac{a}{r} = \cos\varphi$$
$$\frac{b}{a} = \tan\varphi\,,$$

s čimer definiramo *sinus*, *kosinus* in *tangens* kota. Sinus kota je torej razmerje med nasprotno stranico in hipotenuzo kateregakoli pravokotnega trikotnika, ki ga zgradimo nad tem kotom. Podobno velja za kosinus in tangens. Vsa tri razmerja poimenujemo s skupnim imenom *kotna razmerja*. Med seboj niso neodvisna, ampak so očitno povezana, upoštevajoč izreka (8.3) in (8.4):

$$\sin\varphi = \cos(90° - \varphi) \qquad (8.8)$$
$$\cos\varphi = \sin(90° - \varphi)$$
$$(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$$
$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,.$$

Določitev kotnih razmerij

Ker kotna razmerja niso odvisna od velikosti kroga, narišemo s šestilom poljubno velik krog na papir, za izbrane kote z ravnilom izmerimo projekcije ter sestavimo ustrezno tabelo. Dovolj je, da izmerimo tabelo za sinus; kosinus in tangens izračunamo iz ustreznih povezav (8.8).

°	sin	cos	tan
0	0	1	0
10	0,174	0,985	0,176
20	0,342	0,940	0,364
30	0,500	0,866	0,577
40	0,643	0,766	0,839
45	0,707	0,707	1
50	0,766	0,643	1,19
60	0,866	0,500	1,73
70	0,940	0,342	2,75
80	0,985	0,174	5,67
90	1	0	∞

Tabela 8.1 Kotna razmerja za izbrane kote.

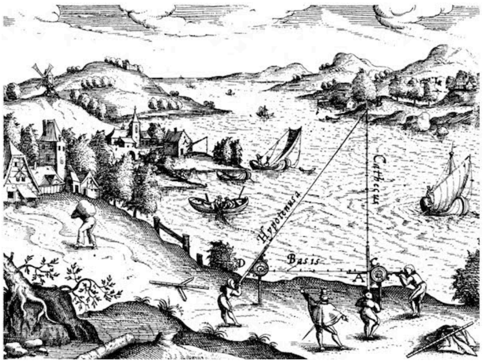
Nekatere vrednosti kotnih razmerij lahko kar uganemo, na primer tiste za sinus kotov 0° in 90°: to sta 0 in 1. Pri kotih 30°, 45° in 60° imamo opravka z enakokrakimi in enakostraničnimi trikotniki, iz katerih razmerja stranic izračunamo; za sinus dobimo 1/2, √2/2 in √3/2.

8.6 Triangulacija

Širina reke

S poznavanjem kotnih razmerij zlahka merimo nedostopne razdalje, recimo širino reke. Ravnamo takole.

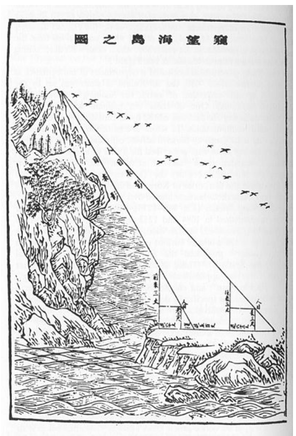
Na nasprotnem bregu poiščemo primerno drevo. Potem na našem bregu izberemo primerno opazovališče in v pravokotni smeri zakoličimo primerno dolgo osnovnico. Nato izmerimo kot, pod katerim vidimo drevo iz drugega krajišča osnovnice. Tangens tega kota pove, koliko je drevo oddaljeno.



Slika 8.6 Merjenje neprehodne razdalje preko reke. Razdalja je izračunljiva, če sta poznana dolžina pravokotne merilne črte – osnovnice – in kot na njenem koncu. (Frisius, 1533)

Višina hriba

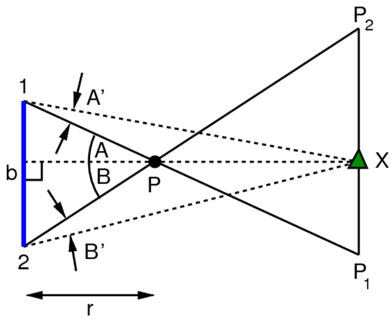
Podobno izmerimo tudi višino nedostopnega hriba. Na ravnini, proč od hriba, izberemo primerno dolgo vodoravno osnovnico d tako, da kaže natanko proti hribu. Iz vsakega krajišča osnovnice nato izmerimo kotno višino hriba. Potreben je še kratek račun in izvemo, koliko je hrib visok: $h/d = \tan\theta_1 \tan\theta_2 / (\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$. Tako z ladje na morju merimo višino vulkanskih otokov.



Slika 8.7 Določanje višine nedostopnega hriba. Potrebna je meritev dolžine osnovnice in dve meritvi kotov, vsaka z enega konca. (Liu Hui, 236)

Zvonik na ozadju

Ko gledamo cerkveni zvonik P iz krajišč 1 in 2 pravokotne osnovnice, vidimo, da je njegova lega na hribovitem ozadju premaknjena. Iz krajišča 1 izmerimo med referentnim hribom X in zvonikom P_1 vodoravni kot A'. Podobno iz krajišča 2 izmerimo med istim referentnim hribom in zvonikom P_2 kot B'.



Slika 8.8 Paralaksa telesa. Iz opazovalnih mest 1 in 2 vidimo opazovano telo P na oddaljenem ozadju v legah P_1 in P_2 glede na referentno telo X.

Če je ozadje mnogo bolj oddaljeno kot zvonik, velja $A \approx A'$ in $B' \approx B$. Vsota $A' + B' \approx A + B = \gamma$ pa je kot, pod katerim iz zvonika vidimo osnovnico. Če je ta kot majhen, to je, če je dolžina osnovnice b mnogo krajša od oddaljenosti r do zvonika, velja

$$\frac{b}{r} = \gamma\,. \tag{8.9}$$

Z meritvijo *paralakse* zvonika γ na oddaljenem ozadju je torej razdalja do zvonika enolično določena. Kadar osnovnica ni pravokotna na vizirno smer, pa moramo izmeriti njen odklon φ od te smeri ter kot dolžino upoštevati projekcijo $b \sin\varphi$.

8.7 Splošni trikotnik

Pri viziranju teles, recimo ladje na morju, ni zmeraj mogoče izbrati osnovnice, ki bi bila pravokotna na vizirno smer. Tedaj je treba uporabiti splošni trikotnik.

Splošni trikotnik s stranicami a, b in c ter z njim nasproti ležečimi koti A, B in C je popolnoma določen, če poznamo: vse tri stranice; dve stranici in kot, ki ga oklepata; ali eno stranico in oba priležna kota. Ugotoviti moramo, kako se iz poljubnih dveh podatkov izračuna tretjega.

Vsota kotov

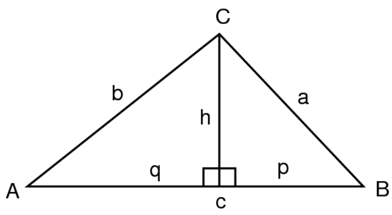
Če skozi ogel B potegnemo vzporednico k nasproti ležeči stranici b, vidimo, da za nastale tri kote velja:

$$A + B + C = 180°\,. \tag{8.10}$$

To je *izrek o vsoti kotov* trikotnika. Če poznamo dva kota, je tretji z njima enolično določen.

Sinusni izrek

Po zgledu hipotenuznega izreka potegnimo pravokotnico h iz oglišča C na stranico c. Rečemo, da je to višina trikotnika nad ustrezno stranico. Prvotni trikotnik razpade na dva pravokotna trikotnika.



Slika 8.9 Trikotnik za izpeljavo sinusnega in kosinusnega izreka.

Velja $\sin A = h/b$ in $\sin B = h/a$. Iz vsake enačbe izrazimo h, ju izenačimo in dobimo (ko postopek ponovimo še na drugih stranicah):

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \,. \tag{8.11}$$

To je *sinusni izrek*. V zapisani obliki velja le, če so vsi koti ostri. Kadar je kakšen notranji kot, recimo A, večji od 90°, moramo namesto sinusa tega kota (ki ni definiran) izračunati sinus "suplementarnega" kota, ki prvega dopolnjuje do 180°: namesto $\sin A$ torej pišemo $\sin(180° - A)$. Izpeljava je podobna.

Kosinusni izrek

V splošnem trikotniku velja $h^2 = a^2 - p^2$ in $h^2 = b^2 - q^2$. Izenačimo desni strani, malo poračunamo, upoštevamo $p + q = c$ in $p = b\cos A$ ter dobimo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \,. \tag{8.12}$$

To je *kosinusni izrek*. Iskana stranica je podana z drugima dvema stranicama in s kotom med njima. Seveda velja to za vsako stranico. Izrek velja v zapisani obliki, če je kot A oster. Kadar je treba računati kosinus kota, večjega od 90° (ki ni definiran), računamo kosinus suplementarnega kota in mešani člen prištejemo, ne odštejemo: namesto $-2bc\cos A$ torej pišemo $+2bc\cos(180° - A)$. Izpeljava je podobna.

8.8 Zemljemerstvo

Osnovni trikotnik

Oboroženi z navedenimi izreki določimo oddaljenost hriba takole. Izberemo in neposredno izmerimo primerno osnovnico na ravnini. Nato na vsakem koncu s kotomerom izmerimo vodoravni kot med njo in hribom. Uporabljamo poseben vizir v obliki navpične špranje. Iz obeh kotov po (8.10) izračunamo tretji kot (pod tem kotom iz hriba vidimo osnovnico) in s sinusnim izrekom (8.11) še obe stranici. Z dodatnim merjenjem navpičnih kotov pa določimo še višino hriba.

Mreža trikotnikov

Iz iste osnovnice lahko seveda izmerimo dve ali več tarč, recimo gorskih vrhov v okolici. Ko sta dve tarči izmerjeni, postane njuna medsebojna razdalja nova osnovnica, iz katere lahko nadaljujemo merjenja. Tako razpredemo po okolici mrežo trikotnikov in jo premerimo. To je tudi način, kako države izdelujejo svoje zemljevide.

8.9 Ploščina

Pravokotnik

Kakor polagamo merske daljice vzdolž ravne ceste, tako lahko pravokotno polje v mislih tlakujemo z merskimi kvadrati, to je s pravokotniki, katerih vse stranice so enako dolge. Izberemo kvadrate s tako dolgo stranico l, kakršno natančnost želimo, recimo 1 m. Če znaša dolžina polja a in njegova širina b, ga tlakuje $(a/l)\cdot(b/l)$ kvadratov. Rečemo, da ima polje *ploščino*

$$S = ab\,. \tag{8.13}$$

S tem je definirana tudi enota za ploščino, *kvadratni meter* (m^2). Ploščino vrta $10\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{m}^2$ na kratko poimenujemo 1 *ar* in ploščino pašnika $100\,\mathrm{m} \times 100\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{ar}$ poimenujemo 1 *hektar*. Če je ploskev majhna ali če zahtevamo večjo natančnost, merimo z manjšimi enotami, na primer s kvadratnimi decimetri (dm^2). Ni nam treba tlakovati zares, ampak le izmerimo obe stranici ter njuni dolžini zmnožimo.

Pravokotni trikotnik

Po diagonali prerezan pravokotnik razpade na dva enaka pravokotna trikotnika. Ploščina takega trikotnika znaša zato polovico ploščine izvornega pravokotnika:

$$S = \frac{1}{2}\,ab\,. \tag{8.14}$$

Poševni trikotnik

Polje, ki je omejeno s samimi ravnimi črtami, lahko vedno razrežemo na trikotnike, ki pa v splošnem niso pravokotni, marveč poševni. Kakšna je ploščina poševnega trikotnika? Pravokotni trikotnik v mislih razrežemo v ozke pasove, vzporedne z bazo, nato pa jih strižno zamaknemo. Tako iz pravokotnega trikotnika nastane poševni z višino h, ploščina posamičnih trakov in s tem celotna ploščina trikotnika pa se ohrani:

$$S = \frac{1}{2}\,ah\,. \tag{8.15}$$

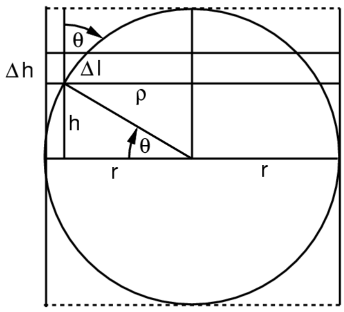
Krog, valj in stožec

Kadar je polje omejeno s krivo črto, ga je treba rezati na zelo drobne pravokotnike ali trikotnike, da dosežemo željeno natančnost. Krog, na primer, razrežemo na ozke enakokrake trikotnike z vrhom v središču in z bazo na krožnici, jih zložimo v kvadrat s stranicama πr in r ter tako dobimo ploščino (ARHIMED).

$$S = \pi r^2\,. \tag{8.16}$$

Plašč valja razvijemo v ravnino. Dobimo pravokotnik s stranicama $2\pi r$ in h ter s tem njegovo ploščino. Tudi plašč stožca lahko razvijemo v ravnino. Nastane izsek kroga z radijem $l^2 = r^2 + h^2$ in kotom $\varphi = 2\pi r/l$. Njegova ploščina je torej $\varphi/2\pi$-ti del od πl^2.

Krogla



Slika 8.10 Računanje površine krogle. Površina krogle je enaka ploščini plašča valja, ki kroglo oklepa.

Površine krogle ne moremo razviti v ravnino. Postopamo takole. Kroglo razrežemo na tanke vodoravne rezine z debelinami Δh. Vsaka rezina ima obliko prisekanega stožca s stranico Δl. Stožec pri elevacijskem kotu θ je na višini $h = r \sin\theta$ nad ekvatorjem krogle ter ima polmer $\rho = r\cos\theta$. Njegova stranica je nagnjena za kot θ od navpičnice.

Če je Δh majhen, je ploščina stožčastega obroča enaka $2\pi\rho \cdot \Delta l$, torej $2\pi r \cos\theta \cdot \Delta h / \cos\theta$ oziroma $2\pi r \Delta h$. To pa ni nič drugega kakor ploščina obroča na plašču valja, ki kroglo oklepa! Vsak obroč na krogli je torej ploščinsko enak ustreznemu obroču na valju! To pomeni, da je površina krogle kar enaka ploščini valja s polmerom r in višino $2r$, torej (ARHIMED)

$$S = 4\pi r^2 . \tag{8.17}$$

Vidimo, da je površina krogle štirikrat tolikšna kot ploščina njenega preseka – kroga – skozi središče.

8.10 Prostornina

Kvader

Skladišče v obliki kvadra lahko v mislih zapolnimo s kockastimi zaboji. Če so stranice skladišča dolge a, b in h, definiramo njegovo *prostornino* kot

$$V = abh . \tag{8.18}$$

S tem je določena tudi njena enota, na primer *kubični meter* (m^3). Manjše prostornine merimo z ustreznimi manjšimi enotami. Enoti $1\,\mathrm{dm}^3$ pravimo tudi *liter*, l.

Piramida

Visoka zgradba, ki jo je najlažje zgraditi, ima obliko "ošpičenega" kvadra; to je piramida. Risba ali model iz lesa pokažeta, da njena prostornina znaša:

$$V = \frac{1}{3}\, abh . \tag{8.19}$$

Poševna piramida ima enako prostornino kot pokončna. Razmislek je prav tak kot pri ploščini poševnega in pravokotnega trikotnika.

Valj, stožec in krogla

Prostor, ki je omejen s krivimi ploskvami, razkosamo na zelo drobne kvadre ali piramide, da dosežemo željeno natančnost, ter seštejemo njihove prostornine. Valj razrežemo na kvadre, stožec na piramide in kroglo na piramide z vrhom v središču ter dobimo (ARHIMED)

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \qquad (8.20)\\ V &= \frac{1}{3}\,\pi r^2 h \\ V &= \frac{4\pi r^3}{3} . \end{aligned}$$

Če v valj, katerega višina je enaka premeru osnovne ploskve, včrtamo kroglo in stožec, je razmerje njihovih prostornin enako 1:2:3. Kaj ni to zanimivo?

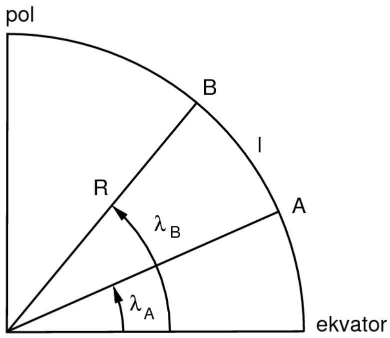
Menzura

Prostornino "nepravilnega" telesa določimo tako, da ga potopimo v valjasto posodo z vodo, menzuro, in izmerimo, koliko se dvigne gladina. S tem je določena prostornina izpodrinjene vode, to je prostornina vrinjenega telesa. Predpostavljamo, da se prostornina vode pri tem ne spreminja.

8.11 Velikost Zemlje

Poldnevniški lok

Kot, pod katerim v mislih iz središča Zemlje s polmerom R vidimo krožni lok l na poljubnem poldnevniku, je enak razliki zemljepisnih širin njegovih krajišč: $l/R = \Delta\lambda$. To nam omogoča, da izmerimo velikost Zemlje. V puščavi izberemo lego severnega krajišča in nato odpotujemo proti jugu za primerno razdaljo. V obeh krajiščih nato z gnomonom izmerimo zemljepisno širino ter izračunamo polmer Zemlje. Dobimo okrog 42oo aktualnih milj (po 1000 dvojnih korakov) (ERATOSTEN).



Slika 8.11 Merjenje velikosti Zemlje. Njen polmer je določen z dolžino loka med dvema geografskima širinama na istem poldnevniku.

Meritev izboljšamo takole. V ne preveč hriboviti pokrajini izberemo severno krajišče. Južno krajišče izberemo s prenosno uro, ki kaže čas severnega krajišča: ko kaže ura poldan z dodano ali odvzeto anomalijo, mora Sonce kulminirati. Vmesni lok med krajiščema pa določimo s triangulacijo na zaporednih trikotnikih. S tem sta določena polmer in obseg Zemlje v aktualnih miljah.

Redefinicija metra

Rezultat uporabimo za novo definicijo metra kot $1/10^6$ dolžine zemeljskega kvadranta, to je četrtine obsega. S tem se znebimo dosedanje navezanosti na človeško velikost. Novi meter se od starih razlikuje za manj kot desetino in ga na novo utelesimo.

Slika 8.12 Meter – palica za merjenje dolžine. Prikazan je javni etalon, izdelan na podlagi meritev poldnevniškega loka skozi Francijo. Etalon je vzidan v pročelje hiše v Parizu. (Anon)

Z novim metrom premerjena Zemlja ima polmer $6{,}4 \cdot 10^3$ kilometrov. Za pomorščake je kot dolžinska enota bolj priročen poldnevniški lok, ki ustreza kotu 1 kotne minute; to je 1 *morska milja* (NM) in znaša 1,8 kilometra.

Morsko obzorje

Zaradi ukrivljenosti Zemlje ne vidimo oddaljenih ladij, ker so skrite pod obzorjem. Prav tako z ladij ne vidimo oddaljenih otokov. Višina h obzorne ravnine nad krogelno morsko gladino z radijem R narašča z oddaljenostjo l: $h = l^2/2R$. Pri razdalji 100 km znaša že 0,8 km. Ladijski opazovalci zato sedijo v košari na jamboru, da vidijo dlje.

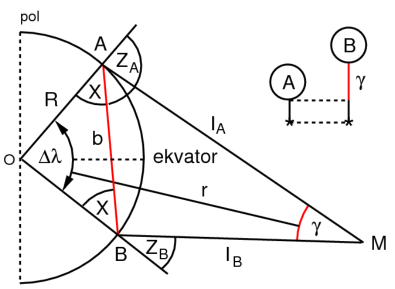
Z gorske višine h vidimo ukrivljeno morsko gladino za kot α pod vodoravnico. Ta kot – depresijo obzorja – zlahka izmerimo z astrolabom. Skica in račun pokažeta, da je z obema količinama takole določen polmer Zemlje: $R/h = \cos\alpha/(1-\cos\alpha)$. Ko z višine 0,8 km izmerimo kot 0,9°, dobimo za radij $6{,}4 \cdot 10^3$ km.

8.12 Do nebesnih teles

Razdalja do Meseca

Kakor merimo oddaljenost zvonika na hribovitem ozadju, tako poskušamo izmeriti oddaljenost Meseca na zvezdnem nebu. Dva opazovalca na istem poldnevniku, med seboj čimbolj oddaljena, opazujeta Mesec ob kulminaciji. Recimo, da istočasno kulminira tudi kakšna zvezda "pod" njim. Opazovalca izmerita navpični kot med to zvezdo in Mesecem. Razlika obeh kotov je kot, za katerega je Mesec premaknjen glede na zvezdno ozadje, torej njegova paralaksa. S paralakso γ in osnovnico b je oddaljenost r enolično določena. Osnovnico najpreprosteje določimo kar z risanjem.

Z nekaj truda lahko osnovnico tudi izračunamo. — Kot X določimo iz vsote notranjih kotov $\Delta\lambda + 2X = 180°$. — Kot Y_A je podan preko suplementarnosti kotov $X + Y_A + Z_A = 180°$. — Osnovnico b določimo iz sinusnega izreka $\sin X/R = \sin\Delta\lambda/b$. — Razdaljo I_B izvemo iz sinusnega izreka $\sin\gamma/b = \sin Y_A/I_B$. — Oddaljenost r pa je, končno, določena s kosinusnim izrekom $r^2 = I_B{}^2 + R^2 + 2 I_B R \cos Z_B$.



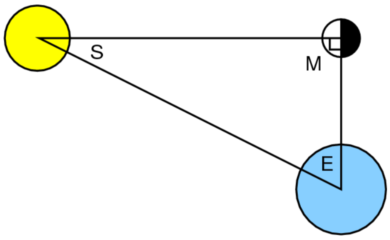
Slika 8.13 Merjenje oddaljenosti Meseca s paralakso.

Meritve so uspešne tudi ob milejših pogojih: z dveh (bližnjih) poldnevnikov in glede na (ne preveč) kasnečo ali prehitevajočo referentno zvezdo. Primeren je tudi Sončev mrk, pri čemer Sonce prevzame vlogo zvezdnega ozadja. Tako dobimo pri osnovnici z redom velikosti Zemljinega polmera paralakso okrog ene kotne stopinje in ugotovimo, da je Mesec oddaljen od Zemlje za 60 njenih polmerov (HIPARH).

Oddaljenost in kotni premer Meseca povesta, kakšna je njegova velikost (8.6). Kotni premer izmerimo neposredno s kotomerom ali preko časa, ki ga potrebuje, da se skrije za navpični rob stavbe. Dobimo 0,5°. Mesec ima zato polmer $1{,}7 \cdot 10^3$ km, torej približno tretjino Zemljinega. Kotni premer se s časom ne spreminja zaznavno, kar pomeni, da se Mesec giblje okrog Zemlje vedno pri enaki oddaljenosti, torej po krogu.

Razdalja do Sonca

Ko Mesec spreminja svoje faze, je enkrat osvetljen natanko do polovice. Takrat tvorijo Zemlja, Sonce in Mesec pravokotni trikotnik s pravim kotom pri Mesecu. Če tedaj uspemo izmeriti kot med Soncem in Mesecem, lahko iz tega izračunamo kot, pod katerim opazovalec na Soncu vidi obe preostali telesi. Kosinus tega kota je enak razmerju oddaljenosti Meseca in Sonca od Zemlje.



Slika 8.14 Merjenje oddaljenosti Sonca. Prikazana je medsebojna lega Zemlje, Sonca in Meseca, kadar je ta osvetljen do polovice. Z merjenjem kota med Soncem in Mesecem je določena tudi razdalja do Sonca.

Meritev potrebnega kota je nenatančna, ker je težko določiti, kdaj je Mesec osvetljen natanko do polovice; ker je ta kot le malo manjši od pravega; in ker majhna merilna napaka pri kotu povzroči veliko napako pri razdalji. Ocenimo, da je iskani kot večji od 87°. Iz tega sledi, da je Sonce od Zemlje oddaljeno najmanj 20-krat toliko kot Mesec (ARISTARH).

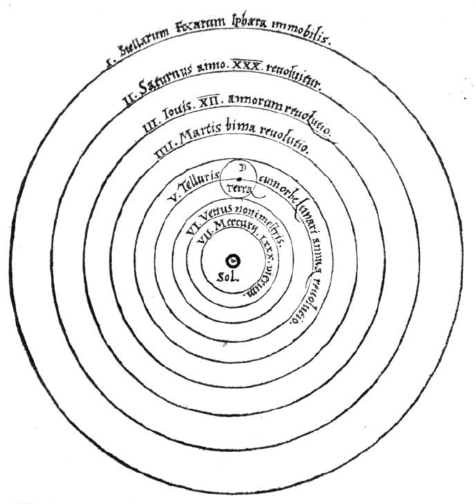
Izmerimo še Sončev premer, podobno kot pri Mesecu. Zaradi varnosti gledamo skozi zakajeno stekleno šipo. Dobimo 0,5°, kar je slučajno enako kot pri Mesecu. To pomeni, da mora biti Sonce vsaj 5-krat večje od Zemlje. Morda je še mnogo večje in mnogo bolj oddaljeno!

8.13 Sončni sistem

Kako lahko okoli majhne Zemlje kroži tako veliko Sonce pri tako veliki oddaljenosti? Saj morajo biti razdalje, ki jih prepotuje v enem dnevu, gromozanske. Mar ni bolj verjetno, da se Zemlja vrti okrog svoje osi in je gibanje Sonca po nebu zgolj navidezno?

Središče sveta

To nas vodi do nove, pravilnejše slike sveta kot *sončnega sistema* (ARISTARH, KOPERNIK). V središču sveta je Sonce. Okrog njega krožijo planeti, vsi v približno isti ravnini, a pri različnih oddaljenostih. Rečemo, da zarisujejo svoje *orbite*. Bližnji planeti obkrožijo Sonce prej kot oddaljeni. Zemlja je tudi planet, tretji po vrsti. Sonce obkroži v enem letu. Pri tem se hkrati vrti okoli svoje osi; en zavrtljaj se kaže kot en dan. Os vrtenja ni pravokotna na ravnino kroženja, marveč nagnjena za 23,5°, in kaže vedno v isto smer med zvezde. S tem so pojasnjene deklinacije Sonca in letne dobe.



Slika 8.15 Heliocentrični sistem sveta. Sonce je v središču, okrog njega krožijo planeti. Luna kroži okoli Zemlje. (Kopernik, 1543)

Okrog Zemlje kroži Mesec. Ko zaide med Zemljo in Sonce, nastane Sončev mrk. Ko zaide za Zemljo, v njeno senco, nastane Mesečev mrk. Morda imajo tudi drugi planeti svoje lune.

Ker je Zemljina orbita velikanska, bi morale zvezde na nebu kazati paralakso. Tega ne opazimo, zato morajo biti silno daleč. Morda so tudi one sonca? □