

2 Naravna števila

Številčnost teles – Pisanje števil – Seštevanje – Odštevanje – Množenje – Deljenje – Računski zakoni

2.1 Številčnost teles

Množice Kdo še ni videl, da se ptice zbirajo v jate in ovce v črede? Rekli bomo, da je opazovana jata ali čreda *množica*, posamične ptice ali ovce pa njeni *elementi*. Nasploh so množice lahko sestavljene iz različnih elementov. Posebej odlična je množica prstov na rokah, ki jo vedno nosimo s seboj.

Za vsako ovco v čredi lahko, kot pastirji, dvignemo svoj prst. Zgodi se naslednje: zmanjka prstov; preostane nekaj prstov; ali pa so vse ovce pregledane in vsi prsti dvignjeni. Ustrezno rečemo, da je ovc *več*, *manj* ali *enako mnogo* kot prstov. Rečemo tudi, da ima vsaka množica posebno lastnost, *številčnost*, in da je množica ovc bolj, manj ali enako številčna kot množica prstov.

Mala števila Ko dvigujemo prste, s tem gradimo vedno nove množice dvignjenih prstov. Številčnost vsake naslednje množice je večja od predhodne. Posamične številčnosti poimenujemo, po vrsti: *nič*, *ena*, *dve*, *tri* ... *devet*, *deset*. To so primerki *naravnih števil*. Številčnost poljubne množice (ovc v ogradi, ljudi v taboru) označujemo s temi števili. Rečemo, da elemente množice *štejemo*.

Slika 2.1 Štetje s prsti. Od leve proti desni so prikazana števila nič, ena, dve, tri, štiri in pet. (Anon)



Velika števila S prsti lahko štejemo le do deset. Če je elementov več, si pomagamo tako, da delamo zareze v palico. Za vsak element naredimo eno zarezo. Zaradi večje preglednosti združimo zareze v skupine po deset – *desetice*, nato pa posebej preštejemo, koliko je teh desetice, in posebej, koliko je preostalih elementov, *enic*. Tako rečemo, na primer, dvanajst (dve nad deset) ali oseminpetdeset (osem in pet deset). Pri še večjih številčnostih združujemo tudi desetice v skupine po deset – *stotice*, in stotice v *tisočice*, ter štejemo posebej tisočice, stotice, desetice in enice. Kot pastirjem in poljedelcem nam to povsem zadostuje.

2.2 Pisanje števil

Številke Z nastankom kmetijskih držav se uvede pobiranje davkov v pridelkih. Za to skrbijo državni uradniki. Ti morajo seveda vedeti, koliko vreč žita ali koliko vrčev olja imajo od vsakega podložnika že pobranih in shranjenih v skladiščih oziroma koliko jih ti še dolgujejo. Tudi prebivalstvo in njihovo živino je treba občasno

prešteti. Zato, kot državni pisarji, izumimo za zapis števil posebne oznake, *številke*: 0 (nič), 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in 9 (devet). Če pozorno pogledamo, vidimo, da so to pravzaprav stilizirane slike sklenjene pesti, enega, dveh in treh iztegnjenih prstov, kvadrata iz štirih paličic in tako naprej. Pišemo na glinaste ploščice, pergament in papir.

Desetiški zapis Z uvedenimi številkami zapišemo poljubno velika števila na zelo učinkovit način. Število dva tisoč trinajst, na primer, zapišemo kot 2013; pri tem posamične številke, od desne proti levi, označujejo število enic (tri), desetice (ena), stotic (nič) in tisočic (dve). To je desetiški mestni zapis števil. V njem ima vsaka številka dvojno vrednost: številčno (koliko enot označuje) in mestno (kakšne enote - enice, desetice itd. pomeni). Očitno lahko na ta način zapišemo še tako velika števila. Nekatera od njih tudi poimenujemo: tisoč tisočic proglasimo za *milijon* in tisoč milijonov za *milijardo*. Slednja enota, se zdi, bi v pošteni državi že morala zadostovati za vse potrebe.

2.3 Seštevanje

Združevanje množic Ko se dve čredi ovac - dva davka - združita, nastane nova čreda. Pri tem samoumevno privzamemo, da ob združevanju nobena začetna ovca ne izgine oziroma da se ne pojavi nobena nova. Začetni čredi sta imeli vsaka svojo številčnost in združena čreda ima spet svojo številčnost. Kako jo določimo? S štetjem, seveda: bodisi ovac ali - lažje - njih nadomeščujočih prstov ali kamenčkov.

Združujemo lahko poljubne množice: ovce v ogradi, ljudi v hišah in drugo. Naj bo, na primer, številčnost prve množice 7 in druge 5. Številčnost združene množice je potem enolično določena s številčnostjo prvotnih dveh množic; simbolično jo označimo kot $7 + 5$ in preberemo "sedem in pet" oziroma "sedem plus pet". Ko združeno množico zares preštejemo, dobimo 12. Rečemo, da smo dve števili *sešteli* in dobili njuno *vsoto*, kar na kratko zapišemo kot $7 + 5 = 12$ in preberemo "sedem plus pet je dvanajst". Leva stran zapisa predstavlja *nakazano* vsoto in desna stran (s štetjem) *izračunano* vsoto. Povezuje ju znak za enakost.

Seštevanje enomestnih števil zlahka opravimo s prsti ali kamenčki. Sčasoma jih niti ne potrebujemo več in seštevamo kar v mislih. S štetjem dobljene vsote lahko tudi zberemo v tabelo *seštevanko*: $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$... $9 + 9 = 18$ in si jo zapomnimo. Kdor hoče postati dober državni pisar, mu za to ne sme biti žal truda.

Tabela 2.1 Seštevanika – tabela vsot za poljubni dve enomestni števili.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Pisno seštevanje

Večja števila seštevamo v mislih tako, da prvemu številu prištevamo po vrsti vse desetiške enote drugega, začeniši z najvišjo enoto. Za to zadostuje poznavanje seštevanke. Pri tem številke izgovarjamo, da si olajšamo pomnjenje. Rečemo, da seštevamo "ustno". Postopek lahko učinkovito organiziramo s pisanjem. Ravnamo takole. Oba seštevanca zapišemo drugega pod drugim tako, da stojе enice v isti navpičnici. Nato seštejemo enice, potem desetice itd. Če dobimo pri kaki desetiški enoti 10 ali več, zapišemo le enice, desetice pa prenesemo v naslednjo višjo desetiško enoto. Zgled:

$$\begin{array}{r} 579 \\ + 43 \\ \hline 622 \end{array}$$

Tri in devet je dvanajst; zapišemo dve in prenesemo eno v stolpec desetic. (Prenesena) ena in štiri je pet in sedem je dvanajst; zapišemo dve in prenesemo eno v stolpec stotic. (Prenesena) ena in pet je šest; zapišemo šest.

Na enak način seštevamo tudi stolpec iz več kot dveh števil, le prenašati je treba večja števila.

2.4 Odštevanje

Ločevanje množic

Iz črede ovac lahko izločimo kakšno čredico. Začetna čreda, izločena čredica in preostala čreda, vsaka ima svojo številčnost. Naj bo, na primer, številčnost začetne črede 7 in številčnost odstranjene čredice 2. Potem nakažemo številčnost preostale črede kot $7 - 2$ in preberemo "sedem manj dve" oziroma "sedem minus dve". Ko čredo zares preštejemo, dobimo 5. Rekli bomo, da smo od prvega števila *odšteli* drugo število in dobili njuno *razliko*: $7 - 2 = 5$. Očitno je razlika tisto "dopolnilno" število, ki ga moramo prišteti okleščeni množici, da dobimo začetno množico.

Pisno odštevanje Majhna števila odštevamo kar v mislih, podobno kot pri seštevanju: od prvega števila odštevamo po vrsti vse enote drugega števila, začeni z največjo. Za večja števila pa uporabljamo naslednji pisni postopek. Drugo število zapišemo pod prvo ter z dopolnjevanjem odštevamo posamične enote, pričeni z enicami. Če je zgornja številka manjša od spodnje, ji prištejemo deset, hkrati pa naslednjo spodnjo desetiško številko povečamo za ena. Zgled:

$$\begin{array}{r} 739 \\ -256 \\ \hline 483 \end{array}$$

Šest in koliko je devet? Zapišemo tri. Pet in koliko je trinajst? Zapišemo osem in prenesemo eno v naslednji stolpec. (Prenesena) ena in dve je tri; koliko je še do sedem? Zapišemo štiri.

2.5 Množenje

Združevanje enakih množic Delavce, ki gradijo državne stavbe, je treba prehranjevati in to zahteva načrtovanje. Naj poje delavec na dan tri (majhne) hlebce kruha. Koliko hlebcev poje pet delavcev? Sešteti moramo torej pet trojk. Vsoto $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ zapišemo na kratko kot $5 \cdot 3$ (ali tudi 5×3) in preberemo "pet krat tri". S tem definiramo *množenje* števila 3 s številom 5 oziroma *produkt* teh dveh *faktorjev*. To je nakazani produkt; s štetjem pa ga dejansko izračunamo: $5 \cdot 3 = 15$. Kar velja za seštevanje enakih množic hlebcev, velja tudi za seštevanje enakih množic poljubne vrste.

Pisno množenje Za lažje računanje produktov si zabeležimo (s seštevanjem) dobljene produkte enomestnih števil, jih uredimo v tabelo *poštevanko* $1 \cdot 1 = 1, 1 \cdot 2 = 2 \dots 9 \cdot 9 = 81$ in si jo zapomnimo.

Tabela 2.2 Poštevanka - tabela produktov za poljubni dve enomestni števili.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Večja števila množimo z enomestnim številom tako, da prvi faktor razcepimo na vsoto desetiških členov, vsakega množimo z drugim faktorjem ter dobljene delne produkte seštejemo. Če je drugi faktor večmestni, a se da zapisati kot produkt enomestnih števil, množimo prvi faktor zaporedoma z njimi. Za to zadostuje znanje seštevanke in poštevanke. Splošni postopek pa učinkovito organiziramo takole. Oba faktorja zapišemo v štric. Nato z najvišjo enoto desnega faktorja množimo posamične enote levega faktorja, začenši z enicami. Če je kakšen rezultat dvoštevilen, zapišemo samo enice in prištejemo zapomnjene desetice k produktu z naslednjo višjo enoto. Tako dobimo prvi delni produkt. Postopek ponovimo z vsako naslednjo nižjo enoto desnega faktorja in rezultat zapisujemo kot naslednji delni produkt pod prejšnjega, vendar vsakokrat zamaknjenega za eno mesto v desno. Na koncu vse delne produkte seštejemo. Zgled:

$$\begin{array}{r}
 539 \cdot 27 \\
 \hline
 1078 \\
 3773 \\
 \hline
 14553
 \end{array}$$

Dva krat devet je osemnajst; zapišemo osem, zapomnimo ena. Dva krat tri je šest; plus (zapomnjena) ena je sedem; zapišemo sedem. Dva krat pet je deset; zapišemo deset. — Sedem krat devet je triinšestdeset; zapišemo tri, zapomnimo šest. Sedem krat tri je enaindvajset; plus (zapomnjena) šest je sedemindvajset; zapišemo sedem, zapomnimo dve. Sedem krat pet je petintrideset; plus (zapomnjena) dve je sedemintrideset; zapišemo sedemintrideset. — Seštejemo prvo in drugo vrstico.

2.6 Deljenje

Ločevanje v enake množice

V shrambi imamo petnajst hlebcev. Razdeliti jih hočemo na pet enakih kupov, po enega za vsakega delavca. Koliko hlebcev pride v tak kup? Najpreprosteje to ugotovimo tako, da iz shrambe jemljemo posamične hlebce in jih po vrsti nalagamo na prvi, drugi ... peti kup. To delamo, dokler ne preostane v shrambi nič ali manj kot pet hlebcev, ki jih, celih, ne moremo več razdeliti. Potem preštejemo, koliko je hlebcev v kakem kupu. Rekli bomo, da smo število petnajst *delili* s številom pet, kar zapišemo kot $15 : 5$ (ali tudi $15 \div 5$) in preberemo "petnajst deljeno s pet". Rekli bomo tudi, da je to nakazani *kvocient* dveh števil, *deljenca* in *delitelja*. S štetjem ugotovimo dejanski kvocient, 3, ter zapišemo $15 : 5 = 3$. Očitno je kvocient tisto število, s katerim moramo pomnožiti delitelj (ter produktu prišteti morebitni ostanek), da dobimo deljenec.

Pisno deljenje Večja števila delimo z enomestnim številom tako, da deljenec razcepimo v primerno vsoto – takšno, da je vsak njen člen deljiv z deliteljem brez ostanka, nakar člene delimo po vrsti ter dobljene kvociente seštejemo. Če je delitelj večmestni, a se da zapisati kot produkt enomestnih števil, delimo deljenec po vrsti z njimi. Pri tem nam zadostujeta seštevanka in poštevanka. Deljenje večmestnih števil je nasploh težko opravilo, zato je najbolje, da ga organiziramo po naslednjem postopku. Obe števili zapišemo vštric. Potem delimo vse desetiške enote deljenca, od največje proti najmanjši, z deliteljem, kakor pove naslednji zgled:

$$981 : 23 = 42$$

61

15 ostanek

Najvišja desetiška enota, devet, ni deljiva s triindvajset, najvišji dve, osemindvetdeset, pa že. — Triindvajset gre v osemindvetdeset (ugibamo) štirikrat, zapišemo štiri. — Kolikšen je ostanek? Štirikrat tri je dvanajst in koliko je osemnajst? Šest, zapišemo šest, ostane ena. Štirikrat dve je osem, plus (preostala) ena je devet in koliko do devet? Nič. Ostanek, šest, je torej manjši od triindvajset, kar je v redu. Če bi bil ostanek večji, je bilo ugibanje kvocienta napačno in ga je treba povišati. — K ostanku pripišem naslednjo desetiško enoto, eno. — Triindvajset gre v enainšestdeset (ugibamo) dvakrat, zapišemo dve. — Kolikšen je ostanek? Dvakrat tri je šest in koliko je enajst? Pet, zapišemo pet, ostane ena. Dvakrat dve je štiri, plus (preostala) ena je pet in koliko do šest? Ena, zapišemo ena. Ostanek, petnajst, je spet manjši od delitelja, kar je v redu. — Ker nimamo več desetiških enot za pripisovanje, končamo.

2.7 Računski zakoni

Lastnosti operacij Seštevanje, množenje, odštevanje in deljenje bomo poimenovali osnovne *računske operacije*. Od teh sta prvi dve "direktni", drugi dve pa njima "obratni". Direktni operaciji imata nekatere lepe lastnosti, kot smo deloma že videli ali kot se lahko dodatno prepričamo s polaganjem kamenčkov. Če s črkami m , n in k označimo katerakoli naravna števila, velja:

$$m + n = n + m \quad (2.1)$$

$$(m + n) + k = m + (n + k) = m + n + k$$

$$m \cdot n = n \cdot m$$

$$(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k) = m \cdot n \cdot k$$

$$k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n.$$

Oklepaji označujejo vrstni red operacij. Znak za množenje ponavadi kar izpuščamo. Z besedami rečemo, po vrsti, da je vsota komutativna in asociativna, produkt pa komutativen, asociativen in distributiven glede na vsoto. Naštete lastnosti, njih pet, poimenujemo *računske zakone*. Pravzaprav niso nič drugega kot

odsev dejstva, da se pri združevanju in razdruževanju množic njihovi elementi ohranjajo, to je, da obstoječi elementi ne izginejo, niti ne nastajajo novi. \square