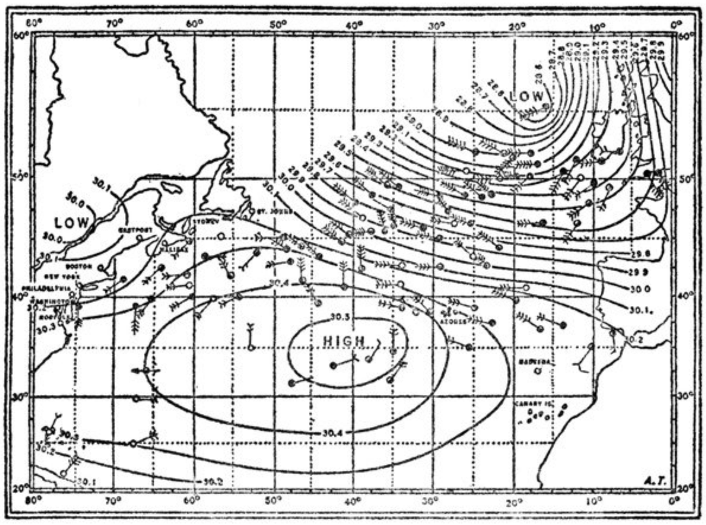
32 Prostorska polja

Skalarna in vektorska polja – Gradient in smerni odvod – Pretok in divergenca – Cirkulacija in rotor – Operacije drugega reda – Krivočrtne koordinate – Cilindrične koordinate – Krogelne koordinate

32.1 Skalarna in vektorska polja

Primeri polj

Količine, ki so "porazdeljene" po točkah prostora in so torej odvisne od treh prostorskih koordinat, imenujemo prostorska *polja*. Dobri primeri so naslednji: temperatura, pritisk in hitrosti v ozračju ter gravitacijske, električne in magnetne sile v prostoru. Naštete polja so bodisi *skalarna* ali *vektorska*. Ker primerov za kompleksna polja (še) nimamo, se z njimi ne bomo ukvarjali.



Slika 32.1 Prizemno polje zračnega pritiska in vetrov nad Atlantikom. Izmerile so ga ladje, ki so prikazane s krožci. Pritisk je podan z izobarami (v palcih živega srebra) in veter z zastavicami. Veter piha približno vzporedno z izobarami. (US Weather Bureau)

Splošno skalarno polje, neodvisno od časa, bomo označili kot

$$U = U(x, y, z) \tag{32.1}$$

in splošno vektorsko polje kot

$$\boldsymbol{v} = (v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z)). \tag{32.2}$$

Raziščimo, kaj lahko povemo o njih!

32.2 Gradient in smerni odvod

Gradient polja

Začnimo s skalarnim poljem. Ko se premaknemo iz izbrane točke polja v kako sosednjo točko, se polje v splošnem spremeni. Sprememba na enoto dolžine $\mathrm{d}U/\mathrm{d}s$ je odvisna od tega, v katero smer se premaknemo. Izmed vseh smeri je ena – označimo jo z enotnim vektorjem $\boldsymbol{n}$ – posebej odlikovana: to je tista, vzdolž katere je sprememba polja največja. Velikost in smer te spremembe opišemo z vektorjem, *gradientom* polja:

$$\operatorname{grad} U = \boldsymbol{n} \cdot \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} . \tag{32.3}$$

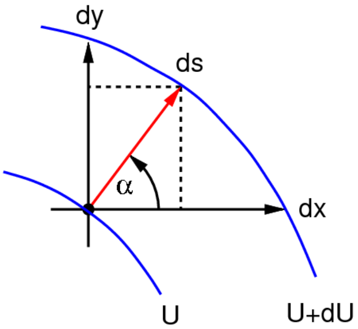
Gradient skalarnega polja je torej vektorsko polje. Njegovi vektorji kažejo, v kateri smeri se skalarno polje najbolj spreminja in kako velike so te spremembe. Definicija gradienta ni odvisna od izbire koordinatnega sistema. Je invarianta polja.

Koordinatni zapis

Kako bi gradient izrazili s koordinatami? Vpeljimo poljuben koordinatni sistem. Gradientni premik ds ima v smeri osi x komponento $\mathrm{d}x = \mathrm{d}s/\cos\alpha$, pri čemer je α kot med gradientno in abscisno smerjo. To pomeni, da $\mathrm{d}U/\mathrm{d}x = (\mathrm{d}U/\mathrm{d}s)\cos\alpha$. Podobno velja za preostali dve komponenti. Vse tri enačbe združimo v vektorsko obliko. V desni strani prepoznamo $(\mathrm{d}U/\mathrm{d}s)\,\boldsymbol{n}$, torej velja

$$\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x} , \frac{\partial U}{\partial y} , \frac{\partial U}{\partial z} \right) . \tag{32.4}$$

Velikost gradienta je seveda $|\operatorname{grad} U|$ in njegova smer je $\boldsymbol{n} = \operatorname{grad} U / |\operatorname{grad} U|$.



Slika 32.2 Gradient skalarnega polja. Definiran je kot odvod v smeri največjega naraščanja polja.

Operator nabla

Tudi na komponentni izraz za gradient lahko pogledamo kot na produkt: $(\partial U/\partial x, \partial U/\partial y, \partial U/\partial z) = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)\, U$. S tem vpeljemo vektorski operator *nabla* in velja

$$\operatorname{grad} U = \boldsymbol{\nabla} U \tag{32.5}$$

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial y} , \frac{\partial}{\partial z} \right) .$$

Nabla je diferencialni operator in simbolični vektor. Ima lastnosti tako odvoda kot vektorja. Pričakujemo, da bodo zanj veljala podobna pravila odvajanja kot za navaden odvod. Kratki računi (v komponentah in z enotnimi vektorji $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ in $\boldsymbol{k}$) res pokažejo, da veljajo standardna pravila $\boldsymbol{\nabla}(cU) = c\boldsymbol{\nabla}U$, $\boldsymbol{\nabla}(U+V) = \boldsymbol{\nabla}U + \boldsymbol{\nabla}V$ in $\boldsymbol{\nabla}(UV) = U\boldsymbol{\nabla}V + V\boldsymbol{\nabla}U$.

Smerni diferencial

Kako pa se skalarno polje iz točke $\boldsymbol{r}$ spreminja v izbrano smer $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$? To povemo s *smernim diferencialom* $\mathrm{d}U = U_x \mathrm{d}x + U_y \mathrm{d}y + U_z \mathrm{d}z$. (Indeksi ne pomenijo komponent, saj jih skalar pač nima, ampak parcialna odvajanja.) Desno stran zapišemo kot skalarni produkt dveh vektorjev, gradienta in premika, ter dobimo

$$\mathrm{d}U = \boldsymbol{\nabla} U \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\nabla}) U \,. \tag{32.6}$$

Kar je zapisano v oklepaju, razumemo kot operator smernega diferenciranja. Skalarni produkt gradienta in nanj pravokotnega premika je enak nič, torej je diferencial v tej smeri enak nič, kakor tudi mora biti.

Zaporedne smerne diferenciale lahko seštejemo in dobimo spremembo polja med dvema oddaljenima točkama, izraženo preko gradienta tega polja

$$U_2 - U_1 = \int \boldsymbol{\nabla} U \,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \,. \tag{32.7}$$

Vrednost polja v točki 2, relativna na vrednost v točki 1, je neodvisna od tega, po kateri poti jo določamo. To je *izrek o integralu gradienta*. Pravzaprav ni nič drugega kot posplošitev osnovnega izreka integralnega računa (17.2), namreč da je "navadni" integral funkcije ene spremenljivke enak limitni vsoti njenih diferencialov. V posebnem primeru, ko je pot sklenjena, torej zanka, je krivuljni integral gradienta enak nič.

32.3 Pretok in divergenca

Pretok

Poglejmo sedaj vektorska polja. Kakor teče reka po strugi, tako "teče" splošno vektorsko polje skozi prostor; nazorno si ga predstavljamo kar s tokovnicami. Pretok reke skozi izbrani presek struge nam da zamisel, da prav tako definiramo *pretok* vektorskega polja skozi izbrano ploskev:

$$\Phi = \int \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S \,, \tag{32.8}$$

Ploskev je lahko ravna ali zvita. K pretoku skozi vsak njen ploskovni element prispeva le pravokotna komponenta polja, to je projekcija poljskega vektorja na smer ploskovne normale. V komponentah zapišemo $\boldsymbol{n} \cdot \mathrm{d}S = (\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$, torej

$$\int \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S = \int\!\!\int v_x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \int\!\!\int v_y \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \int\!\!\int v_z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \,. \tag{32.9}$$

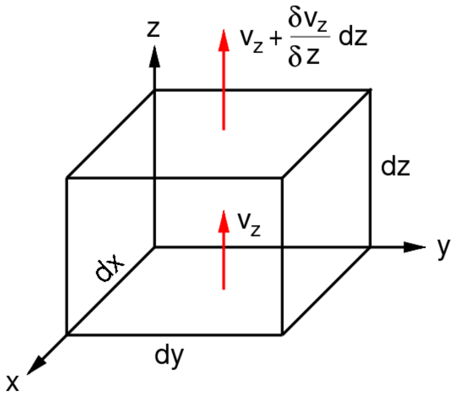
Vsak presek struge ima svoj pretok. Če med dvema zaporednima presekoma ni *izvorov* in *ponorov*, sta oba pretoka enaka. To nas napelje na misel, da uvedemo pretok skozi sklenjeno ploskev, sestoječo iz dveh zaporednih presekov in iz zamejitvenih sten struge. Ali še bolje: skozi sklenjeno ploskev kakršnekoli oblike, potopljeno v reko, to je v vektorsko polje. Kadar je pretok polja skozi sklenjeno ploskev različen od nič, bomo rekli, da so znotraj ploskve *neto izvori* polja: pozitivni ali negativni. Kadar pa je pretok nič, v notranjosti bodisi ni izvorov/ponorov ali pa se medsebojno izničujejo.

Divergenca

Za podrobnejšo raziskavo notranjih izvorov (ponore bomo zanaprej obravnavali kot negativne izvore), naredimo sklenjene ploskve znotraj vektorskega polja poljubno majhne. S tem definiramo prostorninsko *gostoto izvorov* kot

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, dS \,. \tag{32.10}$$

Rečemo, da je to *divergenca* polja. Divergenca vektorskega polja je skalarno polje. Definirana je neodvisno od izbire koordinatnega sistema in je zato invarianta polja.



Slika 32.3 Divergenca vektorskega polja. Definirana je kot neto pretok vektorskega polja skozi majhno zaprto ploskev.

Kako naj divergenco izrazimo s koordinatami? Vpeljemo poljuben koordinatni sistem. Sklenjeni ploskvi damo obliko kvadra. Slika pokaže naslednje. Neto pretok v smeri z znaša $(dv_z/dz)dz \cdot dx\,dy$. Podobno velja za neto pretoka v smeri x in z. Vse tri pretoke seštejemo, delimo s prostornino $dx\,dy\,dx$ in dobimo

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} \,. \tag{32.11}$$

Prostorninski integral divergence

Prostornino znotraj poljubne sklenjene ploskve si mislimo zapolnjeno s samimi drobnimi kvadri. Pretok skozi kvader znaša $\oint \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}\, dV$. Seštejemo pretoke po vseh kvadrih. Prispevki po stičnih ploskvah se medsebojno izničijo in preostane pretok skozi oklepajočo ploskev:

$$\oint \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}\, dV \,. \tag{32.12}$$

Pretok polja skozi sklenjeno ploskev je torej enak integralu divergence tega polja po zaobjeti prostornini. Ta skoraj samoumevni *divergenčni izrek* omogoča, da namesto integriranja po površini (kar je ponavadi težko) raje integriramo po prostornini.

Divergenca je skalarni diferencialni operator. Z malo računanja v komponentah in z enotnimi vektorji ugotovimo, da veljajo standardna pravila odvajanja: $\boldsymbol{\nabla} \cdot (c\boldsymbol{v}) = c\,\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}$ in $\boldsymbol{\nabla} \cdot (U\boldsymbol{v}) = U\,\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{\nabla} \cdot U$.

32.4 Cirkulacija in rotor

Cirkulacija

Reka teče ponekod gladko, drugod se vrtinči. Na zamišljeni krožni poti po obrobju takega vrtinca so vsi hitrostni vektorji bolj ali manj usmerjeni vzdolž poti. Na podobni poti kje drugje, izven *vrtincev*, pa so hitrostni vektorji na kakšnem odseku usmerjeni vzdolž poti, na preostalem odseku pa v nasprotno smer. Kaže torej, da je integral vektorskega polja po sklenjeni poti, to je zanki, pomemebna količina. Zato definiramo *cirkulacijo* splošnega vektorskega polja po poljubni zanki kot

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\,. \tag{32.13}$$

V komponentah se integral glasi

$$\oint \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint v_x\,\mathrm{d}x + \oint v_y\,\mathrm{d}y + \oint v_z\,\mathrm{d}z\,. \tag{32.14}$$

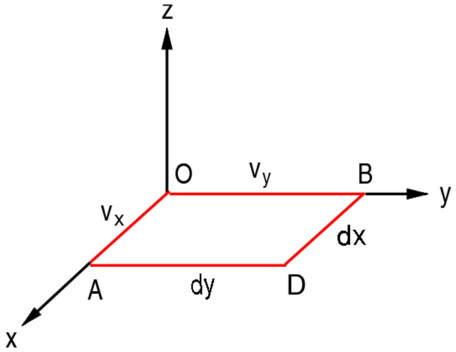
Kadar je cirkulacija po zanki različna od nič, rečemo, da so na (vsaj eni) ploskvi, napeti na zanko, prisotni *neto vrtinci* polja. Če je preučevana cirkulacija enaka nič, pa bodisi vmes ni vrtincev oziroma se ti medsebojno izničujejo.

Rotor

Za bolj natančno obravnavanje notranjih vrtincev naredimo zanke v vektorskem polju ravninske, poljubno majhne in jih tudi orientiramo v različne smeri. Zanka definira komponento *rotorja* polja v smeri svoje normale. Primerno zasukana zanka pokaže, v kateri smeri $\boldsymbol{n}$ je komponenta rotorja največja in s tem enaka celotnemu rotorju:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}\cdot \lim_{S\to 0} \frac{1}{S} \oint \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\,. \tag{32.15}$$

Rotor vektorskega polja je tudi vektorsko polje. Njegovi vektorji kažejo, kje so vrtinci polja, kako so močni in kako so usmerjeni. Definicija rotorja je neodvisna od izbire koordinatnega sistema in je zato invarianta polja.



Slika 32.4 Rotor vektorskega polja. Definiran je kot cirkulacija vektorskega polja vzdolž majhne zanke.

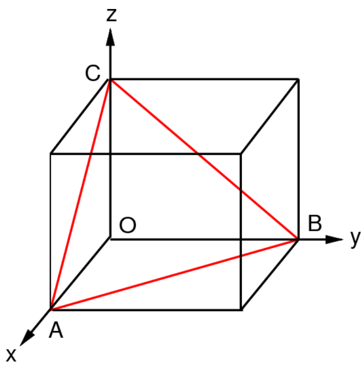
Komponentni zapis

Kakšen je rotor v koordinatnem zapisu? Določiti moramo njegove tri pravokotne komponente, to je, preučiti tri ustrezno usmerjene zanke. Slika pove naslednje.

Produkt $\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ znaša na odseku OA: $v_x\,\mathrm{d}x$; na odseku AD: $(v_y + (\partial v_y/\partial x)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y$; na odseku DB: $-(v_x + (\partial v_x/\partial y)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$; in na odseku BO: $-v_y\,\mathrm{d}y$. Vse seštejemo, delimo s ploščino $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ in dobimo izraz za komponento rotorja vzdolž osi z. Podobno napravimo še za drugi dve osi in dobimo vse tri komponente rotorja

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}\,. \tag{32.16}$$

Tako kot gradient in divergenca se tudi rotor lepo izraža z operatorjem nabla.



Slika 32.5 Rotor in njegove komponente.

Komponente in projekcije

Prepričali bi se še radi, da se tri pravokotne komponente rotorja, izračunane iz treh kvadratnih zank, res sestavljajo v vektor. Slika pove naslednje. Naj trikotnik ABC določa ravnino, katere normala $\boldsymbol{n}$ kaže v smer rotorja. Normala oklepa s koordinatnimi osmi kote α, β in γ. Ploščina trikotnika je S_n in cirkulacija Γ_n poteka vzdolž stranic AB, BC in CA. Ta cirkulacija je enaka vsoti treh cirkulacij Γ_x, Γ_y in Γ_z po treh stranskih trikotnikih OBC, OCA in OAB, saj se prispevki vzdolž skupnih stranic izničijo. Ploščina stranskega trikotnika $S_x = S_n \cos\alpha$ in podobno za druga dva. Naštete cirkulacije zapišemo kot produkte ustreznih rotorjev in ploščin ter dobimo (po deljenju z S_n) $\mathrm{rot}_n\,\boldsymbol{v} = \cos\alpha\,\mathrm{rot}_x\,\boldsymbol{v} + \cos\beta\,\mathrm{rot}_y\,\boldsymbol{v} + \cos\gamma\,\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{v}$. Iz tega razberemo $\mathrm{rot}_n\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}\cdot(\mathrm{rot}_x\,\boldsymbol{v}, \mathrm{rot}_y\,\boldsymbol{v}, \mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{v})$. To je dokaz, da se rotor res projicira v pravilne komponente oziroma da komponente res opisujejo pravi vektor.

Majhna okrogla ploščica z narisano puščico, ki plava po gladini vode in se pri tem vrti, kaže, kakšen je lokalni rotor v navpični smeri. Integral obodne hitrosti po obsegu ploščice znaša $2\pi r v$, ploščina je πr^2, njun količnik pa pove $\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{v} = 2v/r = 2\omega$. Rotor je torej enak dvakratni kotni hitrosti vrtenja. V notranjosti tekočine pa si moramo misliti prozorno kroglico s tremi vrisanimi puščicami.

Ploskovni integral rotorja

Ploščino poljubne ploskve, napete na veliko zanko, si mislimo razkosano na drobne kvadrate. Cirkulacija po kvadratu znaša $\oint \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$. Seštejemo cirkulacije po vseh kvadratih. Prispevki po stičnih robovih se medsebojno izničijo in preostane cirkulacija po zunanji oklepajoči zanki:

$$\oint \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\,. \tag{32.17}$$

Cirkulacija polja po sklenjeni zanki je torej enaka integralu rotorja tega polja po katerikoli zaobjeti ploskvi. Ta *rotorski izrek* omogoča, da namesto integriranja po zanki raje integriramo po ploskvi in obratno, kakor je pač računsko lažje.

Rotor je vektorski diferencialni operator. Z nekaj računanja v komponentah in z enotnimi vektorji ugotovimo, da veljajo naslednja pravila odvajanja: $\boldsymbol{\nabla} \times (c\boldsymbol{v}) = c\,\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}$ in $\boldsymbol{\nabla} \times (U\boldsymbol{v}) = U\,(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla}\, U)$.

32.5 Operacije drugega reda

Divergenca in rotor gradienta

Gradient skalarja je vektor. Nad tem vektorjem lahko izvršimo operacijo divergence ali rotorja. Kaj dobimo? Računanje s komponentami pokaže:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} U) = \boldsymbol{\nabla}^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\\ &\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} U) = 0\,.\end{aligned} \tag{32.18}$$

Simbolično lahko torej računamo tako, kot da bi bil nabla pravi vektor in skalarno polje navaden skalar: $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a}\, c) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})\, c = \boldsymbol{a}^2\, c$. In $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a}\, c) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a})\, c = 0$.

Kakšen pomen ima izraz $\boldsymbol{\nabla}^2 U$? Okrog preučevane točke si zamislimo kocko z robovi dl. V središčni točki aproksimirajmo $\partial^2 U/\partial x^2 \approx [(U_{i+1} - U_i)/\mathrm{d}l - (U_i - U_{\mathrm{i}-1})/\mathrm{d}l]/\mathrm{d}l$ in podobno za druga dva odvoda. Dobimo $\boldsymbol{\nabla}^2 U = (\bar{U} - U_0)/S$, pri čemer je U_0 polje v preučevani točki (v sredini kocke), $\bar{U}$ povprečna vrednost polja na šestih ploskvah kocke in S površina kocke. Če je torej izraz $\boldsymbol{\nabla}^2 U$ v preučevani točki enak nič, je vrednost polja v tej točki enaka povprečni vrednosti na "ekvidistantni" ploskvi okrog nje. Če ni nič, pa meri odmik od tega povprečja. V pomanjkanju boljšega imena mu bomo rekli *delta* polja in ga označili ΔU. Delta polja torej pove, koliko se polje v izbrani točki razlikuje od povprečja v neposredni okolici.

Zanimiva je tudi ugotovitev, da gradient poljubnega skalarnega polja nima vrtincev. To je pričakovano, saj je le z drugimi besedami povedano, da je integral gradienta po sklenjeni zanki enak nič.

Divergenca in rotor rotorja

Rotor vektorja je vektor. Tudi nad njim lahko legitimno izvršimo operacijo divergence ali rotorja. Računanje v komponentah, v zadnjem primeru precej dolgovezno, pove:

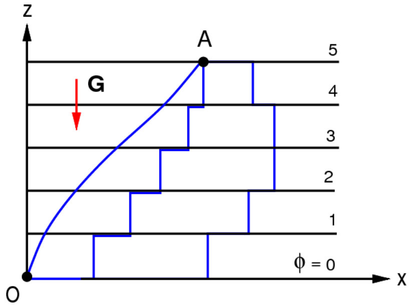
$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) = 0\\ &\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v}\,.\end{aligned} \tag{32.19}$$

Spet smemo računati kot s pravimi vektorji. V produktu $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ je faktor v oklepaju vektor, pravokoten na $\boldsymbol{a}$ in $\boldsymbol{b}$, torej je njegov skalarni produkt z $\boldsymbol{a}$ enak nič. Druga enačba pa je tudi taka, kot pravi dvojni vektorski produkt. Spet dobimo zanimiv rezultat, namreč da rotor poljubnega vektorskega polja nima izvorov.

Preostala operacija drugega reda – gradient divergence – je že zaobjeta v identiteti za rotor rotorja.

Konservativna polja

Naj bo vektorsko polje tako, da je njegova cirkulacija (oziroma rotor) povsod enaka nič: $\nabla \times \boldsymbol{G} = 0$. Rečemo, da je takšno polje *konservativno*. Dober primer je homogeno gravitacijsko polje v bližini Zemlje. Ker vemo, da je rotor enak nič tudi za gradient poljubnega skalarnega polja, sledi, da se da konservativno vektorsko polje izraziti kot gradient ustreznega skalarnega polja: $\boldsymbol{G} = -\nabla \phi$. To skalarno polje poimenujemo *potencial*. Negativni predznak vključimo zato, ker želimo, da se potencial veča vzdolž smeri polja.



Slika 32.6 Potencial konservativnega polja. Prikazano je homogeno gravitacijsko polje $\boldsymbol{G}$. Vrednost potenciala ϕ v izbrani točki je določena z integralom polja vzdolž poljubne krivulje iz referentne točke.

Kako izračunamo potencial? Izberemo referentno točko v polju in ji dodelimo poljubno vrednost potenciala. Potem izračunamo krivuljni integral vzdolž poljubne poti do vsake točke polja in s tem določimo tamkajšnji potencial: $\phi - \phi_0 = \int \boldsymbol{G}\, \mathrm{d}\boldsymbol{s}$. Pot izberemo tako, da je računanje najlažje. Očitno je tovrstna izbira potenciala nedoločena za izhodiščno konstanto. Drugače rečeno: če je ϕ potencial konservativnega polja, potem je tak tudi $\phi + \mathrm{const}$. Za gravitacijsko polje $\boldsymbol{G} = (0, 0, -g)$ tako izračunamo $\phi = gz_0 + gz$.

32.6 Krivočrtne koordinate

Skalirni faktorji

Kadar ima polje cilindrično ali krogelno simetrijo, ga je priročno obravnavati v temu prilagojenih koordinatah. Cilindrične koordinate so, kot vemo: ρ, φ in z, krogelne pa: r, θ in φ. Poljubne pravokotne *krivočrtne koordinate* označimo s q_1, q_2 in q_3. Prostor je prepleten z njihovimi koordinatnimi krivuljami. Skozi vsako točko gredo tri med seboj pravokotne krivulje. Vzdolž krivulje 1 je usmerjen dolžinski element

$$\mathrm{d}s_1 = h_1\, \mathrm{d}q_1 \tag{32.20}$$

in podobno vzdolž drugih dveh. Trije *skalirni faktorji* h_i so pravzaprav koreni že spoznanih metričnih koeficientov: $h_i = \sqrt{g_{ii}}$ (31.31). Za cilindrične koordinate znašajo, kot znano: 1, ρ in 1 ter za krogelne: 1, r in $r \sin\theta$.

Ploščinski element z normalo vzdolž krivulje 1 je

$$\mathrm{d}S_1 = h_2\, h_3\, \mathrm{d}q_2\, \mathrm{d}q_3 \tag{32.21}$$

in podobno za ostali dve. Prostorninski element pa znaša

$$\mathrm{d}V = h_1\, h_2\, h_3\, \mathrm{d}q_1\, \mathrm{d}q_2\, \mathrm{d}q_3\,. \tag{32.22}$$

Gradient, divergenca in rotor

Zapisani elementi omogočajo, da izračunamo gradient, divergenco in rotor v krivočrtnih koordinatah, izhajajoč iz brezkoordinatnih definicij teh količin. Ravnamo prav tako kot pri kartezičnih koordinatah, le računanja je več:

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\, U &= \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}, \frac{1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}, \frac{1}{h_3}\frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \\
\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial v_1 h_2 h_3}{\partial q_1} + \frac{\partial v_2 h_3 h_1}{\partial q_2} + \frac{\partial v_3 h_1 h_2}{\partial q_3} \right] \\
\mathrm{rot}_1\, \boldsymbol{v} &= \frac{1}{h_2 h_3}\left(\frac{\partial v_3 h_3}{\partial q_2} - \frac{\partial v_2 h_2}{\partial q_3} \right) \\
\mathrm{rot}_2\, \boldsymbol{v} &= \frac{1}{h_3 h_1}\left(\frac{\partial v_1 h_1}{\partial q_3} - \frac{\partial v_3 h_3}{\partial q_1} \right) \\
\mathrm{rot}_3\, \boldsymbol{v} &= \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial v_2 h_2}{\partial q_1} - \frac{\partial v_1 h_1}{\partial q_2} \right).
\end{aligned} \tag{32.23}$$

Delta

Iz enačb za gradient in divergenco sledi enačba za divergenco gradienta, torej za delto polja v krivočrtnih koordinatah:

$$\begin{aligned}
\Delta U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\Big[&\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \\
&\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial U}{\partial q_3} \right)\Big].
\end{aligned} \tag{32.24}$$

32.7 Cilindrične koordinate

Vstavitev cilindričnih skalirnih faktorjev v dobljene enačbe pove:

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\, U &= \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\
\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho\, v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\mathrm{rot}_\rho\, \boldsymbol{v} &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \rho v_\varphi}{\partial z} \right) \\
\mathrm{rot}_\varphi\, \boldsymbol{v} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial z} \right) \\
\mathrm{rot}_z\, \boldsymbol{v} &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho v_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi} \right) \\
\Delta U &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\,.
\end{aligned} \tag{32.25}$$

Osnosimetrična polja

Enačbe so videti kar zamotane, vendar se močno poenostavijo, če ima polje *osno simetrijo*. Temperatura v steni cevi, po kateri teče vroča voda, ima na primer osno simetrični profil $T = T(\rho)$. Njegova gradient in delta zato znašata

$$\mathrm{grad}_\rho T = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\rho}\,. \tag{32.26}$$

$$\Delta T = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\rho})\,.$$

Lep vodni vrtinec ima profil hitrosti $v_\varphi = v_\varphi(\rho)$. Njegova divergenca in rotor zato znašata

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0 \tag{32.27}$$

$$\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho v_\varphi}{\mathrm{d}\rho}\,.$$

Togo vrtenje, ko $v_\varphi = \omega\rho$, zadevo še bolj poenostavi v $\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{v} = 2\omega$, kakor tudi mora biti. Če pa se voda v vrtincu giblje tako, da $v_\varphi\rho = \mathrm{const}$, je rotor povsod enak nič. "Vrtinec" je zato brezvrtinčen!

32.8 Krogelne koordinate

Ko v splošne enačbe vstavimo krogelne skalirne faktorje, pa dobimo:

$$\mathrm{grad}\,U = (\frac{\partial U}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}) \tag{32.28}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta\, v_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\mathrm{rot}_r\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2\sin\theta}(\frac{\partial r\sin\theta\, v_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial r v_\theta}{\partial\varphi})$$

$$\mathrm{rot}_\theta\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial r\sin\theta\, v_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\varphi})$$

$$\mathrm{rot}_\varphi\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{r}(\frac{\partial r v_\theta}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta})$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\,.$$

Radialno simetrična polja

Te enačbe so še bolj zapletene kot cilindrične. Se pa lepo poenostavijo za polja, ki imajo *radialno simetrijo*. Primer je temperaturni profil v notranjosti Zemlje, $T = T(r)$. Njegova gradient in delta znašata

$$\mathrm{grad}_r T = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\,. \tag{32.29}$$

$$\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r})\,.$$

Tudi težno polje v Zemlji in izven nje ima radialno simetričen profil $g_r = g_r(r)$. Njegova divergenca in rotor znašata

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{g} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r^2 g_r}{\mathrm{d}r} \tag{32.30}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{g} = 0\,.$$

Zunaj Zemlje, kjer $g_r = g_0 \, {r_0}^2 / r^2$, postane tudi divergenca enaka nič. Tako tudi mora biti, saj tam ni izvorov polja. □